

Кафедра ядерной физики физического факультета  
СПбГУ

Л.В.Краснов

ПРОХОЖДЕНИЕ ЧАСТИЦ И  
ИЗЛУЧЕНИЙ ЧЕРЕЗ ВЕЩЕСТВО.

Санкт – Петербург

2009

©2009 Л.В.Краснов ПРОХОЖДЕНИЕ ЧАСТИЦ И ИЗЛУЧЕНИЙ ЧЕРЕЗ ВЕЩЕСТВО.

Книга предназначена для студентов, специализирующихся в области экспериментальной ядерной физике.

# Содержание

<b>1</b>	<b>Введение.</b>	<b>4</b>
<b>2</b>	<b>Прохождение тяжелых заряженных частиц через вещество.</b>	<b>5</b>
2.1	Расчет удельных потерь. . . . .	6
2.2	Пробег тяжелых частиц в веществе. . . . .	12
2.3	Расчет брегговской кривой. . . . .	14
<b>3</b>	<b>Прохождение электронов через вещество.</b>	<b>15</b>
3.1	Расчет удельных потерь электронов. . . . .	15
3.2	Пробег электронов в веществе. . . . .	17
3.3	Тормозное излучение электронов при прохождении через вещество. . .	20
<b>4</b>	<b>Многократное рассеяние заряженных частиц.</b>	<b>24</b>
4.1	Угловое распределение частиц после прохождения слоя вещества. . . .	24
4.2	Флуктуации ионизационных потерь. . . . .	28
<b>5</b>	<b>Прохождение гамма – квантов через вещество.</b>	<b>33</b>
5.1	Когерентное рассеяние. . . . .	33
5.2	Комптоновское рассеяние. . . . .	34
5.3	Фотоэффект . . . . .	37
5.4	Процесс образования пар. . . . .	40
5.5	Ослабление пучка гамма – квантов при прохождении через слой вещества. . . . .	42
5.6	Пример рассмотрения прохождения электронов через вещество. . . . .	43
<b>6</b>	<b>Некоторые процессы взаимодействия частиц со средами.</b>	<b>45</b>
<b>7</b>	<b>Задачи.</b>	<b>48</b>
7.1	Приложение А. . . . .	50
7.2	Приложение Б . . . . .	52
7.3	Приложение В . . . . .	53

## Список иллюстраций

1	. . . . .	7
2	. . . . .	8
3	. . . . .	9
4	Ионизационные потери электронов (сплошная), мюонов (штрих – точка), протонов (длинный штрих), дейтронов (короткий штрих), альфа – частиц (точки) в кремнии. . . . .	11
5	. . . . .	12
6	Сплошная кривая – зависимость $N/N_0$ от величины $R/\bar{R}$ ; точечная кривая $-p(R)$ распределение пробегов по их величине. По оси $X$ отложена переменная $R/\bar{R}$ ; по оси $Y$ отложена переменная $N/N_0$ . . . . .	13
7	. . . . .	14
8	. . . . .	18

9	.....	19
10	.....	21
11	.....	23
12	Траектории электронов (слева) и протонов (справа). . . . .	26
13	.....	27
14	.....	27
15	.....	27
16	.....	27
17	.....	28
18	.....	28
19	.....	29
20	.....	31
21	Слева – функция Вавилова, рассчитанная для следующих значениях параметров: $k=0.5$ , $\beta^2=0.1, 0.25, 0.5, 0.75, 0.99$ . Справа – функция Вавилова, рассчитанная для следующих значениях параметров $\beta^2$ и $k$ : 1– (0.5 и 10) ;2– (0.05 и 10) ;3– (0.5 и 5) ;4– (0.05 и 5). . . . .	32
22	Комptonовское рассеяние гамма – кванта на электроне. . . . .	34
23	Угловое распределение вторичных гамма – квантов при комptonовском рассеянии. Энергия первичного кванта 1, 10, 100 МэВ. Направление движения первичного кванта $0^\circ$ . Слева - в барнах/стр, справа – нормированное распределение в полярных координатах . . . . .	35
24	Угловое распределение вторичных электронов при комptonовском рассеянии. Энергия первичного кванта 1, 10, 100 МэВ. Направление движения первичного кванта $0^\circ$ . Слева - в барнах/стр, справа – нормированное распределение в полярных координатах . . . . .	36
25	Энергетическое распределение комptonовских электронов при рассеянии гамма – квантов с энергией 0.511, 1.20 и 2.76 МэВ. . . . .	37
26	Зависимость эффективного сечения комptonовского рассеяния от энергии гамма - кванта. Зависимости нормированы на сечение томпсонского рассеяния $\sigma_T = \frac{8\pi}{3}r_0^2$ . . . . .	38
27	Зависимость эффективного сечения фотоэффекта от энергии гамма - кванта. Зависимости нормированы на сечение томсонского рассеяния. Рассчитаны зависимости для <i>C, Si, Ge, Sn</i> и <i>Pb</i> . . . . .	39
28	Угловое распределение фотоэлектронов. Энергия первичного кванта 38, 212, 612 КэВ. Направление движения первичного кванта $0^\circ$ . Слева - в барнах/стр, нормированное на $Z^5\alpha r_e^2$ , справа –распределение в полярных координатах, нормированное на 1 в максимуме . . . . .	40
29	.....	42
30	Зависимость линейного коэффициента ослабления гамма – квантов в кремнии (слева), свинце (справа) от энергии квантов. Точки – фотоэффект, штрихи – комptonовское рассеяние, штрих – точка – рождение пар, сплошная линия – сумма всех сечений. . . . .	43
31	Зависимость числа электронов, прошедших в кремнии толщину <i>T</i> . Зависимость нормирована на один один падающий электрон. . . . .	44

- 32 Слева – зависимость числа вторичных электронов(толстая линия) и гамма – квантов(тонкая линия), рожденных в кремнии в точке с координатой  $T$ . Справа – энергетический спектр вторичных электронов(толстая линия) и гамма – квантов(тонкая линия), рожденных во всем образце кремния. Зависимости нормированы на один падающий электрон с энергией  $15 \text{ МэВ}$ . . . . . 45
- 33 Слева – число электронов, прошедших в кремнии толщину  $T$ . Зависимость нормирована на один падающий электрон. Справа – энергетический спектр электронов(сплошная линия) и гамма – квантов(штрихи), выходящих из слоя кремния с толщиной  $1 \text{ см}$ , на который падают электроны с энергией  $4.52 \text{ МэВ}$ . Зависимости нормированы на одну падающую частицу. . . . . 46

# 1 Введение.

Содержание пособия рассчитано на подготовку студентов, специализирующихся в области экспериментальной ядерной физике.

В пособии рассматриваются процессы, происходящие при взаимодействии частиц и излучений при распространении их в веществе. Эти процессы вызываются электромагнитными и сильными взаимодействиями. При изучении ядерных реакций, процессов рождения адронов нельзя ограничиваться только рассмотрением только сильных взаимодействий. Конечно для упомянутые процессы вызываются в основном именно сильным взаимодействием, но при проведение соответствующего эксперимента всегда используются частицы, проходящие через вещество мишеней, детекторов, защиты. В основном мы ограничимся процессами, в которых частица либо теряет часть своей энергии, либо исчезает и появляются другие частицы. Эти процессы сопровождаются рассеянием частиц, размытием энергии первично монохроматических частиц. Очевидно, что учет этих процессов необходим при проектировании экспериментальной установки и обработке его результатов.

Эти же процессы исключительно важны при выборе типа детекторов. Как правило, сигнал, генерируемый детектором, является функцией энергии, оставленной частицей в веществе детектора. Понимание процессов взаимодействия регистрируемой частицы с веществом детектора позволяет оптимизировать его работу. Например, в современных установках по изучению взаимодействия частиц с энергией несколько  $TэВ$  невозможно создать детектор, в котором выделялась бы вся энергия частицы. Приходится создавать детекторы, регистрирующие по возможности максимальное количество различных частиц, рожденных в изучаемом взаимодействии. Разнообразие сортов частиц требует учета особенностей взаимодействия их с веществом при разработке детектора.

Рассмотрение прохождения частицы через вещество в данном курсе ограничено процессами электромагнитных взаимодействий. Это связано с тем, что процессы сильных взаимодействий рассматриваются в курсах ядерной физики и физики частиц. Рассмотрение ограничивается процессами, в которых частица может потерять значительную долю своей энергии, либо исчезнуть.

Как будет показано далее, рассматриваемые электромагнитные взаимодействия происходят между электрическими полями частицы, электронами и ядрами атомов вещества. В этих процессах могут рождаться новые частицы и исчезать первичные. Новые частицы это электроны, позитроны и гамма - кванты. Хотя в принципе возможно рождение и других частиц, например пары  $\mu^+ \mu^-$ , подобные процессы происходят при достаточно высоких энергиях и имеют малые сечения и не рассматриваются в этом курсе.

Значительная доля потери энергии частицей вызывается ее взаимодействием с электронами атомов вещества среды. Эти процессы относятся к атомной, а не ядерной, физике. Обычно нас интересует рассмотрение этих процессов в применении к частицам с энергиями, значительно превышающими энергию связи электронов в ядрах, поэтому можно упростить задачу, считая электроны свободными или учесть их связь в атоме, вводя средний потенциал ионизации атома. Описание электромагнитных процессов строится с использованием методов квантовой электродинамики. Практически все основные процессы взаимодействия электронов и фотонов между собой и с электрическими полями ядер решены в этой теории (см. монографии [1],

[2]). Однако при этом использовались упрощающие приближения. Например, для описания процессов возбуждения и ионизации атома нужно построить теорию многоэлектронных атомов – эта задача не решена до сих пор. Получаемые в теории формулы, описывающие процесс, часто возможно представить в замкнутой форме, имеющие различную функциональную форму при изменении диапазона параметров. Использование этих формул на практике вызывает затруднения. Описание процессов взаимодействия электрона с атомом возможно при введении некоторых параметров, численное значение которых определяется феноменологически из сравнения с экспериментом. Ценность теоретических моделей описания процессов взаимодействия состоит в том, что они правильно описывают зависимость их характеристик от зарядов частиц и их энергий.

Вообще говоря, процесс прохождения частиц через вещество относится к классу стохастических процессов. Адекватным методом расчета таких процессов является метод статистических испытаний. В практической работе физика – экспериментатора рассмотрение конкретной комбинации частица с заданной энергией и вещество известного состава нет необходимости пользоваться формулами для нахождения характеристик пучка после прохождения среды. Более целесообразно использование разработанных пакетов программ расчетов для ЭВМ.

Перечислим характеристики частиц и вещества, которые определяют процесс прохождения частиц через вещество (в скобках приведены обозначения, которыми мы будем далее пользоваться):

Для частицы	Для среды
Масса ( $M$ )	Плотность ( $\rho$ )
Заряд ( $z$ )	Заряд ядер атомов ( $Z$ )
	Атомный вес ( $A$ )
Энергия ( $E$ )	Ионизационный потенциал ( $I$ )

В тексте при оценке численных характеристик процессов прохождения частиц в качестве вещества используется кремний. Этот выбор определен тем, что кремний наиболее широко используется в детекторах частиц. Многие графики, приведенные в тексте, рассчитаны с использованием пакета программ GEANT [7].

## 2 Прохождение тяжелых заряженных частиц через вещество.

Тяжелая частица, пролетая сквозь вещество, действует на атомные электроны своим кулоновским полем. Электроны атомов либо переходят на другие орбиты, либо покидают атом. За счет этого частица постепенно теряет энергию, а атомы либо ионизируются, либо возбуждаются. Растеряв свою энергию, частица останавливается.

Из-за дальнегодействующего характера кулоновских сил пролетающая частица успевает провзаимодействовать с очень большим числом электронов. Частица при взаимодействии с отдельным электроном отклоняется от первоначальной траектории, но угол отклонения мал из-за ее большой массы по сравнению с массой электрона. Суммарный угол отклонения при прохождении частицей макроскопических расстояний

мал, так как этот угол представляет сумму малых разнонаправленных отклонений в отдельных актах взаимодействия с отдельными электронами. Траектория тяжелой заряженной частицы в веществе практически прямолинейна.

Наша задача состоит в вычислении потери энергии частицей при прохождении ею слоя вещества и полного пути частицы в веществе до ее остановки из-за полной потери кинетической энергии. Обозначим потери энергии на единицу пути  $-\frac{dE}{dx}$ , а полный пробег частицы в веществе  $R$ .

Хотя тяжелая частица теряет энергию различными способами (столкновения с электронами, кулоновские столкновения с ядрами, ядерные столкновения с ядрами и т. д.) и полные потери должны вычисляться суммированием всех этих потерь. Но для тяжелых заряженных частиц основной вклад в потери вносят процессы ионизации и возбуждения атомных электронов вещества. Эти потери объединяются под общим названием ионизационных. Далее рассмотрим только ионизационные потери. Вычисление этой характеристики можно выполнить вводя некоторые приближения.

Расчеты будем производить в рамках квазиклассического приближения. Это приближение справедливо пока неопределенность в угле отклонения частицы в акте взаимодействия мала:  $\Delta\theta/\theta \ll 1$  (см. [1]). Из этого требования вытекает соотношение  $b \gg \hbar/p$ , т.е. дебройлевская длина волны частицы должна быть много меньше прицельного параметра  $b$ ,  $p$  - импульс частицы. Это означает, что такое рассмотрение применимо при достаточно больших прицельных параметрах столкновения  $b$  и при больших импульсах  $p$  налетающей частицы.

Будем считать, что в одном акте взаимодействия тяжелая частица передает малую часть своей энергии. Точную оценку энергии тяжелой частицы, при которой выполняется это требование, получим далее.

Будем пренебрегать энергией связи электронов в атоме, т.е. считать эти электроны свободными.

## 2.1 Расчет удельных потерь.

Рассчитаем удельные потери. Кулоновская сила между частицей с зарядом  $z$  и электроном атома определяется соотношением (см. рис. 1)

$$F = \frac{e^2 z}{x^2 + b^2}$$

Нам нужно найти какова величина импульса, передаваемого частицей электрону. Ее найдем из соотношения

$$\vec{q} = \int \vec{F}(t) dt = \int \vec{F}_{\parallel}(t) dt + \int \vec{F}_{\perp}(t) dt$$

Первый интеграл равен 0.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \vec{F}_{\parallel}(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \vec{F}_{\parallel}(x) (dt/dx) dx = \frac{1}{v} \int_{-\infty}^{\infty} \vec{F}_{\parallel}(x) dx = \frac{1}{v} \int_{-\infty}^0 \vec{F}_{\parallel}(x) dx + \frac{1}{v} \int_0^{\infty} \vec{F}_{\parallel}(x) dx = 0$$

$$F_{\perp} = F \sin \theta = \frac{e^2 z}{x^2 + b^2} \frac{b}{\sqrt{x^2 + b^2}} = \frac{e^2 z}{(x^2 + b^2)^{3/2}}$$



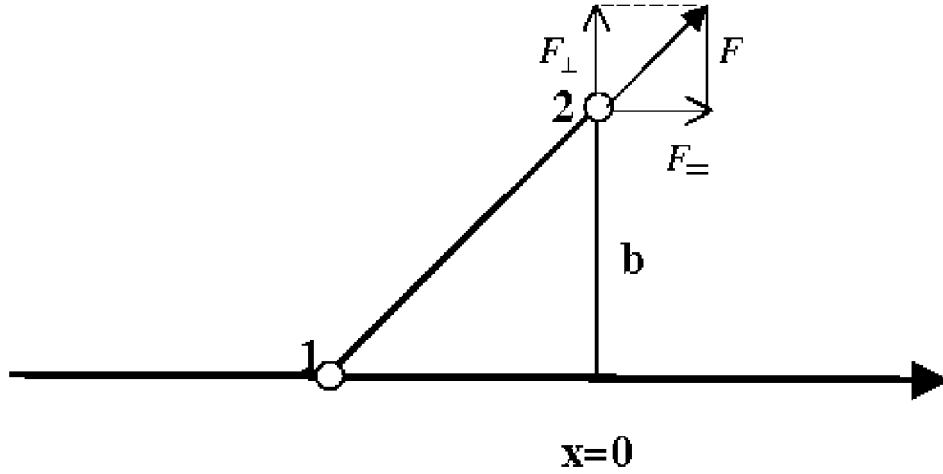


Рис. 1.

1 - налетающая частица, 2 - электрон,  $b$  - прицельный параметр.

$$q = \int_{-\infty}^{\infty} F_{\perp} dt = \frac{1}{v} \int_{-\infty}^{\infty} F_{\perp} dx = \frac{e^2 z b}{v} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + b^2)^{3/2}}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + b^2)^{3/2}} = \frac{x}{b^2 \sqrt{x^2 + b^2}} \Big|_{-\infty}^{\infty} = \frac{2}{b^2}$$

$$q = \frac{2e^2 z}{vb}$$

$$\Delta E = \frac{q^2}{2m} = \frac{2z^2 e^4}{mv^2 b^2}$$

$$-\frac{dE}{dx} = \int_{b_{min}}^{b_{max}} \frac{q^2}{2m} n 2\pi b db = \frac{4\pi z^2 e^4 n Z}{mv^2} \int_{b_{min}}^{b_{max}} db/b = \frac{4\pi z^2 e^4 n Z}{mv^2} \ln \frac{b_{max}}{b_{min}}$$

Здесь мы учли то, что в единице объема содержится  $nZ$  электронов, где  $n$  - число атомов в  $1 \text{ см}^3$  среды,  $Z$  - заряд ядра атома.

$$n = \frac{Z \rho N_A}{A}$$

$\rho$ ,  $N_A$ ,  $A$  - плотность среды, число Авогадро, атомный вес атомов среды соответственно. На рис. 2 показано как подсчитывается число электронов в элементе объема  $dV$ .

Если принять  $b_{max} = \infty$  или  $b_{min} = 0$ , то  $\frac{dE}{dx} = \infty$ . Это означает, что частица моментально теряет всю энергию в веществе и останавливается. Но известно, что это не так. Значит нужно оценить значения  $b_{max}$  и  $b_{min}$ .

Начнем с  $b_{max}$ . Эта величина не может быть больше размеров атома, т.е.  $10^{-8}$  см, т.к. на этих расстояниях электрическое поле действующее на частицу отсутствует - атом нейтрален.

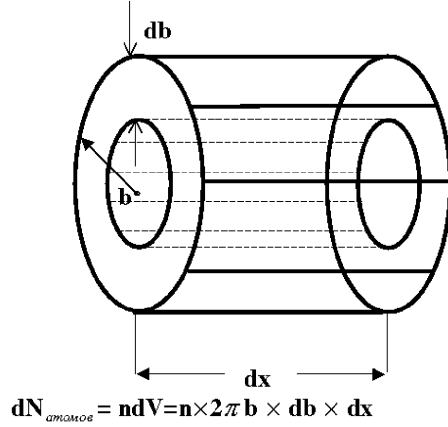


Рис. 2.

Учтем, что время взаимодействия частицы с атомным электроном должно быть меньше, чем время обращения электрона по орбите. Только при коротком воздействии электрического поля на атомный электрон, он может быть покинут атом. Поясним это. Пусть поле, действующее на электрон, имеет вид  $\varepsilon(t)$ . Представим эту величину в виде интеграла Фурье

$$\varepsilon(t) = \int a(\omega) \exp(i\omega t) d\omega$$

$a(\omega) = \int \varepsilon(t) \exp(i\omega t) dt$  дает величину амплитуды колебания с частотой  $\omega$ . Будем считать для оценки, что  $\varepsilon(t) = \varepsilon_0$  при  $-\tau < t < \tau$ . Здесь  $\tau$  время взаимодействия налетающей частицы с электроном. По порядку величины  $\tau = b/v$ . Взяв интеграл, получим

$$a(\omega) = \varepsilon_0 \frac{e^{i\omega\tau} - e^{-i\omega\tau}}{i\omega} = \varepsilon_0 2 \sin(\omega\tau) / \omega$$

$$a(\omega)^2 = \varepsilon_0^2 4 \sin^2(\omega\tau) / \omega^2$$

Этот спектр приведен на рис. 3. Пусть частота вращения электрона по орбите будет  $\omega_e$ . Если  $\tau \gg T_e = 1/\nu_e = 2\pi/\omega_e$ , то  $\tau\omega_e \gg 1$ . При таком значении  $\tau\omega_e$  величина  $a(\omega_e)^2$  мала, т.е. вероятность ионизации мала. Поэтому выберем  $\tau\omega_e \approx 2$ . Время взаимодействия имеет порядок  $\tau \approx 2b/v$ . Отсюда

$$\omega_e \approx 2/\tau = 2v/2b = v/b$$

Отсюда получим оценку для  $b_{max}$ :

$$b_{max} \approx v/\omega_e$$

Оценим  $b_{min}$ . Наше рассмотрение проводится в рамках классической механики. Но из требований квантовой механики вытекает условие на длину волны налетающей частицы –  $\lambda \leq b_{min}$ . Отсюда  $b_{min} \approx \hbar/mv$ . Почему в этой формуле стоит масса электрона  $m$ , хотя имеется в виду импульс налетающей частицы с массой  $M$ ? Это потому, что рассмотрение должно проводиться в системе центра масс электрон – частица, где приведенная масса  $\mu = Mm/(M + m) \simeq m$ , т.к.  $M \gg m$ . Тогда

$$\frac{b_{max}}{b_{min}} = \frac{mv^2}{\hbar\omega_e} = \frac{mv^2}{\bar{I}}$$

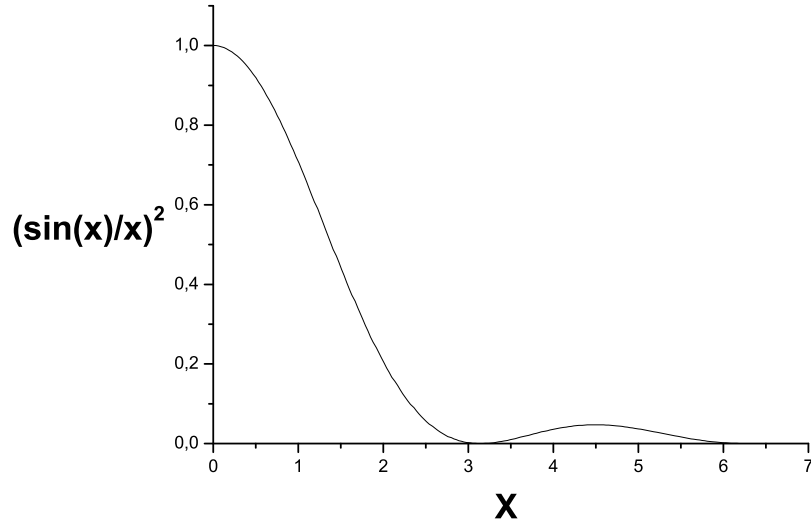


Рис. 3.

Частотный спектр электрического импульса, действующего на атомный электрон.  
 $x = \omega\tau$ .

Здесь мы ввели параметр  $\bar{I} = \hbar\omega_e$ , имеющий смысл среднего ионизационного потенциала. Собирая все вместе, получим

$$-\frac{dE}{dx} = \frac{4\pi z^2 e^4 n Z}{mv^2} \ln \frac{mv^2}{\bar{I}}$$

В нашем рассмотрении мы не учитывали релятивистских эффектов. Если скорость налетающей частицы велика, то электрическое поле электрона становится не сферически симметричным, а сплюснутым. Учет этого эффекта изменяет последнюю формулу. Она принимает вид

$$-\frac{dE}{dx} = \frac{4\pi z^2 e^4 n Z}{mv^2} \ln \frac{mv^2}{\bar{I}(1 - \beta^2)},$$

где  $\beta = v/c$ ,  $c$ -скорость света. Полученное выражение носит название формулы Бора.

Эта формула была уточнена Бете, который учел квантовомеханические и релятивистские эффекты. Он получил выражение

$$-\frac{dE}{dx} = \frac{4\pi z^2 e^4 n Z}{mv^2} \left( \ln \left( \frac{mv^2}{\bar{I}(1 - \beta^2)} \right) - \beta^2 \right) \quad (1)$$

Перепишем эту формулу в виде

$$-\frac{dE}{dx} = \frac{2\pi z^2 e^4 M n Z}{Em} \left( \ln \left( \frac{2mE}{\bar{I}M(1 - \beta^2)} \right) - \beta^2 \right) = \frac{2\pi z^2 e^4 M}{Em} \frac{Z \rho N_A}{A} \left( \ln \left( \frac{2mE}{\bar{I}M(1 - \beta^2)} \right) - \beta^2 \right),$$

Здесь  $E = Mv^2/2$  кинетическая энергия налетающей частицы.

При практическом использовании этой формулы у студентов возникают трудности с правильным выбором единиц измерения. Проверим размерность, которую имеет правая часть этого уравнения:

$$|e^2| = |E||L|; |e^4| = |E|^2|L|^2; |n| = \frac{Z \varrho N_A}{A} = |(g/cm^3)/g| = |cm^{-3}| = |L|^{-3}$$

$$|e^4| \frac{M}{m} |E|^{-1} |n| / |E| = (|E|^2|L|^2)|E|^{-1}|L|^{-3} = \left| \frac{E}{L} \right|$$

Мы получили правильную размерность  $|E|/|L|$ , например, МэВ/см.

Рассчитаем удельные потери протонов с энергией 6 МэВ в кремнии. Подставляем численные значения в формулу: сперва рассчитаем множитель перед логарифмом.

$$\frac{2 \cdot 3.14 \cdot 1^2 \cdot (1.44 \text{ МэВ} \cdot \text{фм}^2 \cdot 938 \text{ МэВ}) \cdot 14 \cdot 2.32 \text{ г/см}^3 \cdot 6.023 \cdot 10^{23}}{6 \text{ МэВ} \cdot 0.511 \text{ МэВ}} \cdot \frac{14 \cdot 2.32 \text{ г/см}^3 \cdot 6.023 \cdot 10^{23}}{28 \text{ г}} =$$

$$= \frac{12.21 \cdot 10^3 \text{ МэВ}^3 \cdot 10^{-26} \text{ см} \cdot 195.5 \cdot 10^{23} \text{ г/см}^3}{3.07 \cdot \text{МэВ}^2} \cdot \frac{195.5 \cdot 10^{23} \text{ г/см}^3}{28 \text{ г}} = (3.984 \cdot 10^{-23} \text{ МэВ} \cdot \text{см}) \cdot (6.983 \cdot 10^{23} \text{ см}^{-3}) =$$

$$= 27.8 \text{ МэВ/см}$$

Теперь вычислим логарифмический множитель: в расчетах будем пользоваться эмпирическим соотношением  $\bar{I} = 13.5Z \text{ эВ}$ . Для кремния  $\bar{I} = 13.5 \cdot 14 = 189 \text{ эВ}$ .

$$\ln\left(\frac{2 \cdot 0.511 \text{ МэВ} \cdot 6 \text{ МэВ}}{189 \cdot 10^{-6} \text{ МэВ} \cdot 938 \text{ МэВ}}\right) = \ln 34.59 = 3.48$$

Окончательно получим

$$\frac{-dE}{dx} = 27.8 \text{ МэВ/см} \cdot 3.48 = 96.7 \text{ МэВ/см} = 9.67 \text{ МэВ/мм} = 9.67 \text{ КэВ/}\mu\text{м}$$

Полученная формула позволяет получить значение ионизационных потерь с точностью 10 - 20 % для энергий частиц до 10 ГэВ/нуклон. Ошибка возникает из-за более сложной зависимости  $\bar{I}$  от  $Z$  среды, чем использованная нами. Существуют многочисленные видоизменения этой формулы, позволяющие повысить точность вычисления ионизационных потерь. Но для практического использования удобнее пользоваться рассчитанными таблицами или многочисленными программами расчетов на ЭВМ. Можно рекомендовать программу SRIM (см. [5]), она может быть получена с сайта [www.srim.org](http://www.srim.org).

При росте энергии налетающей частицы величина  $-\frac{dE}{dx}$  убывает приблизительно обратно пропорционально энергии, так как логарифмический множитель меняется слабо. Для протонов  $-\frac{dE}{dx}$  равно для энергии 10 МэВ 80.7 МэВ/см, а для энергии 20 МэВ 48.5 МэВ/см. Ионизационные потери зависят от массы и заряда частицы как  $Mz^2$ . При одинаковой энергии эти потери у альфа частиц должны быть в 16 раз больше, чем у протонов. По табличным данным для альфа частиц с энергией 20 МэВ  $-\frac{dE}{dx} = 545.2 \text{ МэВ/см}$ , т.е. в 11 раз больше, чем у протонов той же энергии. Из той же формулы видно, что произведение  $-E \frac{dE}{dx} \sim Mz^2 \ln(\dots)$ . На ограниченном интервале

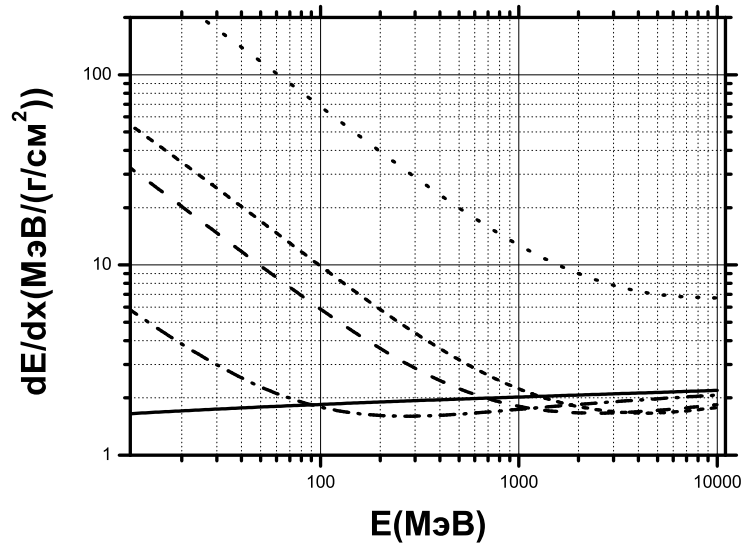


Рис. 4. Ионизационные потери электронов (сплошная), мюонов (штрих – точка), протонов (длинный штрих), дейтронов (короткий штрих), альфа – частиц (точки) в кремнии.

изменения энергии частиц логарифмический член меняется мало. Отсюда можно заключить, что измеряя на опыте  $E, \frac{dE}{dx}$  вычисляя затем их произведение можно различить сорт частицы. Это произведение пропорционально отношению 1:2:3:12:16 для протонов, дейтронов, тритонов,  ${}^3\text{He}$  и  ${}^4\text{He}$ . Этот метод широко используется в экспериментах для идентификации частиц.

На рис. 4 приведена зависимость удельных потерь  $\frac{dE}{dx}$  в кремнии различных частиц от их энергии  $E$ . С ростом энергии  $\frac{dE}{dx}$  для всех частиц падает приблизительно как  $E^{-1}$ . Затем эта величина достигает минимума, который расположен при разных значениях  $E$  в зависимости от сорта частиц. Частицы с одинаковым зарядом вблизи минимума и за ним, чему соответствует энергия сотни МэВ, имеют практически одинаковые удельные потери.

После минимума зависимость удельных потерь от энергии частиц начинает медленно расти за счет роста логарифмического члена, рост обеспечивается членом  $1/(1 - \beta^2) \rightarrow \infty$ , когда  $v \rightarrow c$ . Множитель перед логарифмом перестает меняться, т.к.  $v \approx c$ .

При уменьшении энергии тяжелой частицы удельных потери в веществе растут как  $1/v^2 \sim 1/T$ , где  $v$  - скорость частицы,  $T$  - ее кинетическая энергия. Поэтому удельные потери при движении частицы в веществе растут и становятся максимальными в конце ее пробега в веществе.

В области очень малых энергий тяжелой частицы в веществе приведенная формула для удельных потерь перестает быть справедливой для энергий частицы, при которых ее скорость станет порядка скорости атомного электрона на орбите атома. В

этом случае становится большой вероятностью захвата частицей атомного электрона. При этом частица уменьшает свой заряд с  $z$  на  $z - 1$ . Уменьшение заряда частицы приводит к уменьшению удельных потерь. Особенно сильно этот эффект сказывается для осколков деления ядер, для тяжелых ионов.

На рис.5 изображена зависимость удельных потерь для протона от его энергии. При энергии протона меньшей 50 КэВ потери убывают с уменьшением энергии.

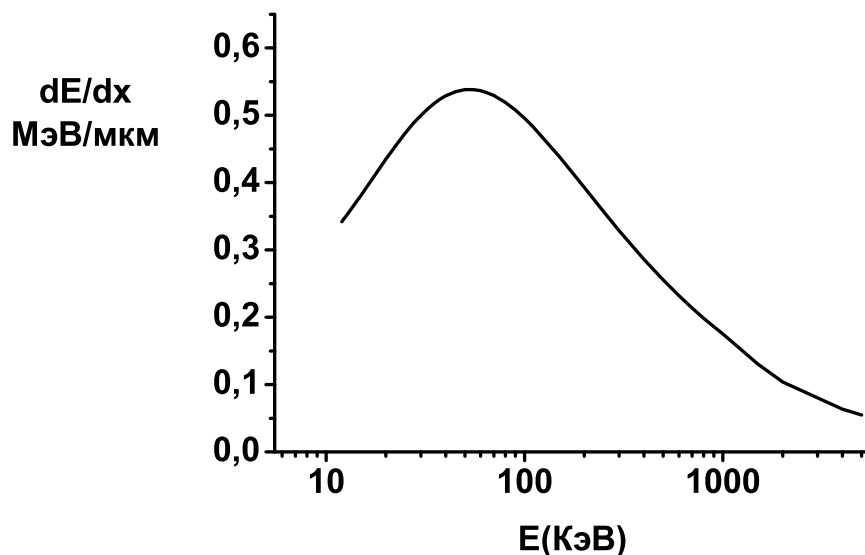


Рис. 5.

Зависимость  $dE/dx$  протона от его энергии.

## 2.2 Пробег тяжелых частиц в веществе.

Процесс прохождения частицы через вещество состоит из ряда элементарных процессов взаимодействия частицы с атомными электронами. В каждом таком акте частица теряет часть своей энергии и отклоняется на некоторый угол от направления своего движения до столкновения. Потери энергии в таком акте малы, угол отклонения так же мал. Оценим величину отклонения частицы в одном акте взаимодействия. Мы выясним дальше, что максимальный импульс, передаваемый частицей электрону, составляет величину  $q = 2mv$ . Следовательно, угол отклонения имеет величину

$$\alpha_{max} = \frac{q}{P} = \frac{2mv}{Mv} = \frac{2m}{M} = \frac{1}{1000} \approx 0.057^\circ$$

Оценка сделана для протона с импульсом  $P$ , скоростью  $v$  и массой  $M = 938 \text{ МэВ}$ . При полном торможении частицы таких актов много. Малость отклонения частицы и малость его разброса гарантирует, что траектория частицы близка к прямой линии.

Для того, чтобы частица потеряла энергию  $\Delta E$ , она должна пройти интервал  $\Delta x$ , определяемый соотношением

$$\Delta x = \Delta E \left/ \left| - \frac{dE}{dx} \right| \right.$$

Отсюда среднее значение пути, на котором частица потеряет всю энергию, определится интегралом

$$R = \int_{E_0}^0 \frac{dE}{\left| -\frac{dE}{dx} \right|}$$

Знание зависимости удельных потерь от энергии частицы позволяет вычислить среднее значение пути, проходимого частицей в веществе до полной остановки. Этот путь называется пробегом частиц в веществе. Имеет смысл говорить именно о среднем значении, так как для каждой отдельной истории прохождения частицы через вещество путь, пройденный ею до остановки, имеет свое конкретное значение. Распределение пробегов  $p(R)$  может быть описано распределением Гаусса

$$p(R)dR = \frac{\exp[-(R - \bar{R})^2/2D_R]dR}{\sqrt{2\pi D_R^2}}$$

$\bar{R}$  - среднее значение пробега или пробег,  $D_R$  - дисперсия этого распределения. На рис. 6 показано отношение числа частиц  $N$ , прошедших через слой вещества, к начальному числу частиц  $N_0$ , от величины  $R/\bar{R}$  - доли среднего пробега  $\bar{R}$ .  $R$  - толщина

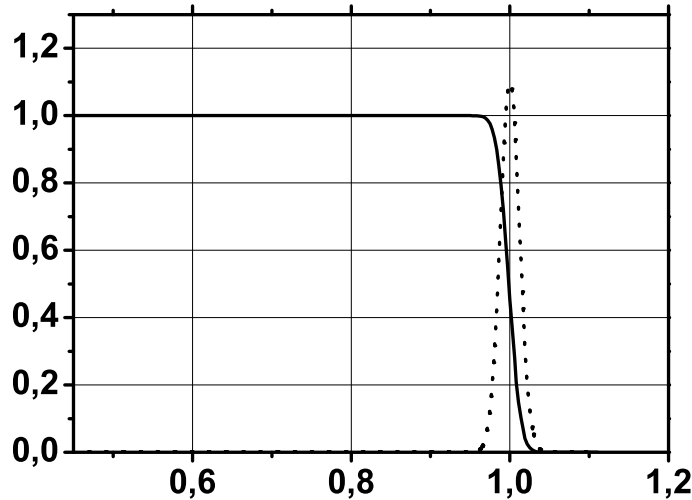


Рис. 6. Сплошная кривая – зависимость  $N/N_0$  от величины  $R/\bar{R}$ ; точечная кривая  $-p(R)$  распределение пробегов по их величине. По оси  $X$  отложена переменная  $R/\bar{R}$ ; по оси  $Y$  отложена переменная  $N/N_0$ .

слоя вещества, пройденного частицей. Кривые рассчитаны для протонов с начальной энергией 50 МэВ, проходящих через слой кремния. Среднему числу частиц, прошедших через слой вещества, равному  $N/N_0 = 0.5$  соответствует пробег  $\bar{R}$ . Это определение  $\bar{R}$ . Если провести касательную к кривой зависимости числа частиц от пробега в точке  $N/N_0 = 0.5$ , то она пересечет ось  $R/\bar{R}$  в точке  $1 + s$ . Величина  $S = s \cdot \bar{R}$  называется страглингом. Эта величина характеризует разброс величин пробегов. Для

примера возьмем протоны с энергией 50 МэВ. В кремнии их пробег составляет 12.1 мм, страглинг равен 0.50 мм. Это означает, что 66% частиц имеют пробег в интервале от 11.6 мм до 12.6 мм.

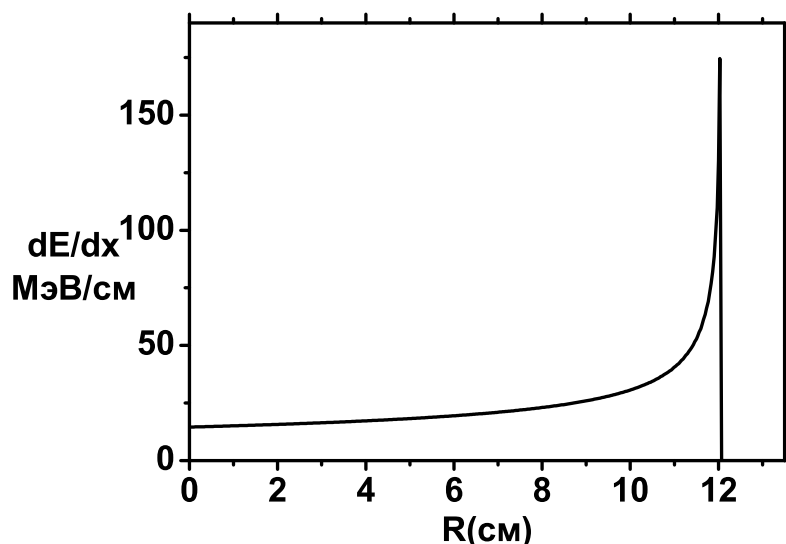


Рис. 7.

Зависимость  $dE/dx$  протона после прохождения расстояния  $R$  в кремнии.

При прохождении частицы через вещество ее энергия постоянно убывает, поэтому удельные потери растут. Наибольшие потери частица испытывает вблизи точки остановки. Распределение потерь протона с начальной энергией 50 МэВ в зависимости от пройденной толщины слоя кремния показано на рис. 7. Зависимость, показанная на рисунке, называется кривой Брега. Пик удельных потерь в конце пробега называется брегговским пиком. Бреговский пик используется в различных приложениях, там, где есть необходимость выделить наибольшую энергию на заданной толщине материала. Для этого нужно на вещество направить частицы, с такой энергией, которая соответствует пробегу равному необходимой толщине.

Зависимость пробега частицы в веществе от ее начальной энергии можно представить в виде  $R = aE^b$ ; формула справедлива для кинетической энергии частицы в диапазоне от единиц МэВ до 100 МэВ. Постоянная  $b$  равна 1.73. Значения  $a$  для разных сортов частиц при пробеге в кремнии приведены в таблице 1. При этих значениях постоянных пробег вычисляется в либо в  $мг/см^2$  либо в  $мм$ .

### 2.3 Расчет брегговской кривой.

Рассчитаем удельные потери частицы в любой точке ее траектории в веществе. Будем пользоваться приближенной формулой для пробега в веществе, поэтому полученной формулой можно пользоваться при кинетических энергиях частицы  $T \ll Mc^2$ .

$$R = aE^b$$



Таблица 1. Значение постоянной  $a$  в формуле  $R = aE^b$ .

Частица	Заряд	$a(\text{мг}/\text{см}^2)$	$a(\text{мкм})$
протон	1	3.22	13.88
дейтрон	1	1.91	8.23
тритон	1	1.42	6.12
${}^3\text{He}$	2	0.354	1.53
${}^4\text{He}$	2	0.295	1.23

Частица с энергией  $E_0$  имеет пробег, равный  $R_0$ .

$$R_0 - x = a(E(x))^b$$

$$E(x) = \frac{(R_0 - x)^{1/b}}{a}$$

$$\ln(E(x)) = -\ln a + \frac{1}{b} \ln(R_0 - x)$$

Дифференцируем это уравнение по  $x$  ( $\beta = 1/b$ )

$$\frac{1}{E(x)} \frac{dE(x)}{dx} = -\frac{\beta}{(R_0 - x)}$$

$$\frac{dE(x)}{dx} = -\beta \frac{E(x)}{R_0 - x}$$

$$\frac{dE(x)}{dx} = -\beta \frac{E(x)}{R_0 - x} = -\frac{1}{ab} (R_0 - x)^{1/b-1}$$

Мы получили формулу, дающую удельные потери в любой точке траектории  $x$

$$\frac{dE(x)}{dx} = -\frac{1}{ab} (R_0 - x)^{1/b-1}$$

## 3 Прохождение электронов через вещество.

### 3.1 Расчет удельных потерь электронов.

Удельные потери  $\frac{dE}{dx}$  для электронов должны вычисляться по видоизмененной формуле. В полученном ранее выражении мы не учитывали, что существует предельная энергия, передаваемая налетающей частицей атомному электрону. Рассмотрим случай, когда масса налетающей частицы много больше массы электрона  $M \gg m$ . Перейдем в систему координат, связанную с налетающей частицей. В этой системе на покоящуюся частицу налетает электрон со скоростью, равной скорости налетающей частицы в лабораторной системе координат  $v$ . Максимальная переданная электрону энергия соответствует случаю, когда электрон отскакивает от частицы с той же

скоростью, при этом скорость электрона меняется от  $\vec{v}$  до  $-\vec{v}$ . Этому соответствует максимальный переданный импульс  $q = 2mv$ , а энергия, потерянная налетающей частицей, равна

$$\Delta E = \frac{q^2}{2m} = \frac{4m}{M} E$$

Если налетающая частица является протоном, то

$$\frac{\Delta E}{E} = \frac{4m}{M_p} \sim \frac{2}{1000}$$

В этом случае налетающая частица в одном акте взаимодействия с атомным электроном может потерять малую часть своей энергии.

Если налетающая частица является электроном, то, т.к. массы частиц одинаковы, потеря энергии налетающего электрона в среднем составляют 1/4 его энергии, а это приводит к тому, что атомный электрон получает значительный импульс, а следовательно отклоняется на значительный угол. При изменении траектории электрона происходит изменение вектора скорости электрона как по величине, так и по направлению. В таком случае электрон излучает электромагнитное излучение и электрон теряет энергию, уносимую этим излучением. Эти потери называются радиационными потерями и их величина при больших энергиях значительна.

Механизм ионизационных потерь у электронов в основном такой же, как и у тяжелых частиц. Значения  $b_{max}$  и  $b_{min}$  из-за малости массы электрона выбираются иначе, чем для тяжелых частиц. Учитываются и другие эффекты. Формула для удельных ионизационных потерь электрона была получена Бете. Она имеет вид

$$-\frac{dE}{dx} = \frac{2\pi e^4 n Z}{mv^2} \times \quad (2)$$

$$\left[ \ln\left(\frac{mv^2}{2\bar{I}} E / (1 - \beta^2)\right) - (2\sqrt{1 - \beta^2} - 1 + \beta^2) \ln 2 + 1 - \beta^2 + 1/8(1 - \sqrt{1 - \beta^2})^2 \right]$$

В этой формуле  $E$  кинетическая энергия электрона:

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} - mc^2$$

Для электронов малых энергий ( $\beta \ll 1$ , но при  $E/\bar{I} \gg 1$ ) формула принимает вид

$$-\frac{dE}{dx} = \frac{2\pi e^4 n Z}{mv^2} \left[ \ln\left(\frac{mv^2}{2\bar{I}}\right)^2 - \ln 2 + 1 \right] \simeq \frac{2\pi e^4 n Z}{mv^2} \left[ \ln\left(\frac{mv^2}{2\bar{I}}\right)^2 \right] \quad (3)$$

Каково соотношение ионизационных потерь протонов и электронов, если их энергии равны и для протона являются нерелятивистскими? В качестве вещества выберем кремний, для которого  $\bar{I} = 169$  эВ. Для этой оценки для электронов возьмем формулу (3). Для протона выберем формулу (1) в виде

$$-\frac{dE_p}{dx} = \frac{2\pi e^4 n Z}{E_p} \frac{M_p}{m} \left[ \ln\left(\frac{2mE_p}{M_p \bar{I}}\right) - \beta^2 \right]$$

Отсюда

$$\frac{dE_p}{dx} / \frac{dE_e}{dx} \sim \frac{M_p}{m} \left[ \ln\left(\frac{2mE_p}{M_p \bar{I}}\right) \right] / \left[ \ln\left(\frac{mv^2}{2\bar{I}}\right)^2 \right] \approx \frac{938}{0.511} \cdot \frac{3.45}{20.6} \approx 300$$

Для электронов с кинетической энергией  $5\text{МэВ}$   $\beta \simeq 0.99$ , т.е. они являются ультрарелятивистскими. Протоны с кинетической энергией  $5\text{МэВ}$  имеют  $\beta = 0.1$ , они нерелятивистские. При наблюдении таких протонов и электронов в детекторах, где видны треки частиц, трек протона будет намного ярче электронного.

Для электронов больших энергий ( $E \gg mc^2$ ) формула ионизационных потерь принимает вид

$$-\frac{dE}{dx} = \frac{2\pi e^4 n Z}{mc^2} \left[ \ln\left(\frac{mc^2 E}{2\bar{I}^2(1-\beta^2)}\right) + \frac{1}{8} \right]$$

Сравним ионизационные потери релятивистских электронов и протонов одинаковой энергии в кремнии. Выберем эту энергию равной  $\varepsilon = 10\text{ ГэВ}$ , тогда параметр  $\beta \approx 1$  для обеих частиц. Для электронов берем формулу (2), в которой  $\beta$  полагаем 1. Для протонов берем формулу (1), которая при  $\beta \approx 1$  принимает вид

$$-\frac{dE}{dx} = \frac{4\pi e^4 n Z}{mc^2} \ln\left(\frac{mc^2}{\bar{I}(1-\beta^2)}\right)$$

$$\frac{dE_p}{dx} \bigg/ \frac{dE_e}{dx} = 2 \left[ \ln\left(\frac{mc^2}{\bar{I}(1-\beta_p^2)}\right) \right] \bigg/ \left[ \ln\left(\frac{mc^2 E}{2\bar{I}^2(1-\beta_e^2)}\right) \right]$$

Для частицы с энергией  $\varepsilon$  и с массой  $m_p$  величина  $1-\beta^2 = (m_p/\varepsilon)^2$ . Для электрона  $1-\beta_e^2 = (0.5/10^4)^2 = 0.25 \cdot 10^{-8}$ . Для протона  $1-\beta_p^2 = (938/10^4)^2 = 0.0088$ .

$$\frac{dE_p}{dx} \bigg/ \frac{dE_e}{dx} = 2 \ln\left(\frac{0.5}{169 \cdot 10^{-6} \cdot 0.88 \cdot 10^{-2}}\right) \bigg/ \ln\left(\frac{0.5 \cdot 10^4}{2 \cdot (169 \cdot 10^{-6})^2 \cdot 0.25 \cdot 10^{-8}}\right) =$$

$$2 \frac{\ln(6.72 \cdot 10^5)}{\ln(3.50 \cdot 10^{19})} = 26.82/45.00 = 0.60$$

Изменение массы частиц в 2000 раз при релятивистских энергиях изменяет ионизационных потери только на 40%. Подсчет по более точным формулам дает при энергии  $10\text{ ГэВ}$  для электронов и протонов значения:  $\frac{dE_e}{dx} = 2.2\text{ МэВ}/(\varepsilon/(с.м.)^2)$ ,  $\frac{dE_p}{dx} = 1.8\text{ МэВ}/(\varepsilon/(с.м.)^2)$ , т.е. потери различаются на  $\sim 20\%$ .

При релятивистских энергиях различить протоны и электроны по их ионизационным потерям практически невозможно, т.к. их ионизационные потери близки.

### 3.2 Пробег электронов в веществе.

Из-за малой массы падающего электрона потери им энергии в акте взаимодействия с атомным электроном меняются от 0 до половины энергии электрона до взаимодействия. Это приводит к тому, что электрон в акте рассеяния может отклониться на большой угол. Траектория электрона значительно отличается от прямой линии. Флуктуации потерь в одиночном акте рассеяния и изменение вектора скорости электрона по направлению приводят к тому, что энергия электронов, прошедших через слой вещества флуктуирует около среднего значения в широких пределах.

На рис. 8 приведены спектры электронов с начальной энергией  $4.5\text{ МэВ}$ , после прохождения слоя кремния, различной толщины. Толщина слоя составляла 0.5, 1.0,

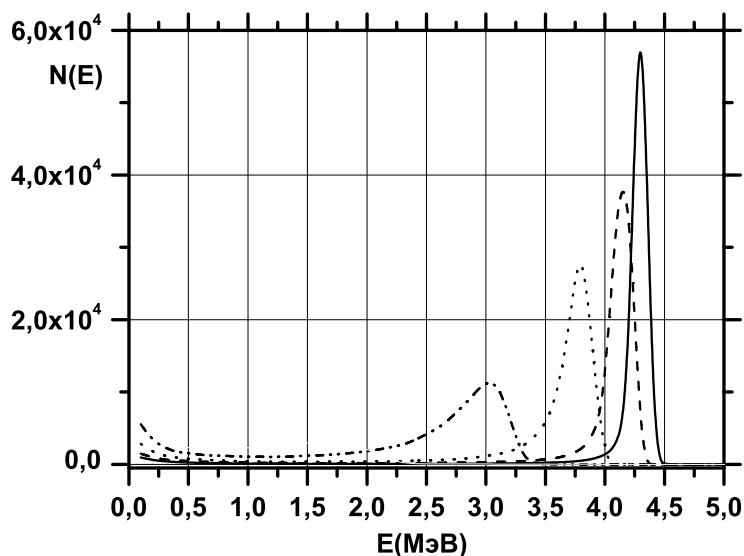


Рис. 8.

Энергетический спектр электронов, прошедших через слой кремния.

2.0 и 4.0 мм. По оси  $X$  отложена энергия электрона, по оси  $Y$  отложено распределение числа электронов, прошедших через вещество, по их энергии. Спектры получены расчетом по программе моделирования распространения частиц в средах GEANT. Прослеживалась история 100000 электронов, вошедших в слой.

Форма спектра определяется двумя эффектами – флуктуацией потерь энергии и флуктуацией длины траектории электрона в веществе. Главный максимум в спектре формируется первичными электронами, потерявшими энергию в слое. Подъем в спектре вблизи нуля связан с электронами малых энергий. При взаимодействии падающего электрона с атомом происходит возбуждение атома или выбивание атомных электронов. Эти вторичные электроны называются дельта – электронами. При достаточной энергии эти электроны могут производить ионизацию среды, выходить из среды и регистрироваться детекторами. Вторичные электроны возникают в веществе и при образовании электрон – позитронных пар гамма - квантами тормозного излучения.

При определении длины пробега электрона в веществе возникает трудность. Для тяжелых частиц разброс длин пробега колеблется около среднего значения на величину  $\leq 1\%$ . Для электронов эта флуктуация существенно больше. Причины этого две: первая – флуктуации потерь энергии в акте взаимодействия налетающего электрона с атомным гораздо больше, чем для случая налетающей тяжелой частицы; если электрон в каком-то акте потерял много энергии, то остаточный пробег уменьшается; вторая - средний угол отклонения от направления движения налетающего электрона в этом акте также велик, это приводит к тому, что траектория движения электрона в среде представляет ломанную линию, значительно отклоняющуюся от линии первоначального движения, полная длина этой ломанной также флуктуирует.

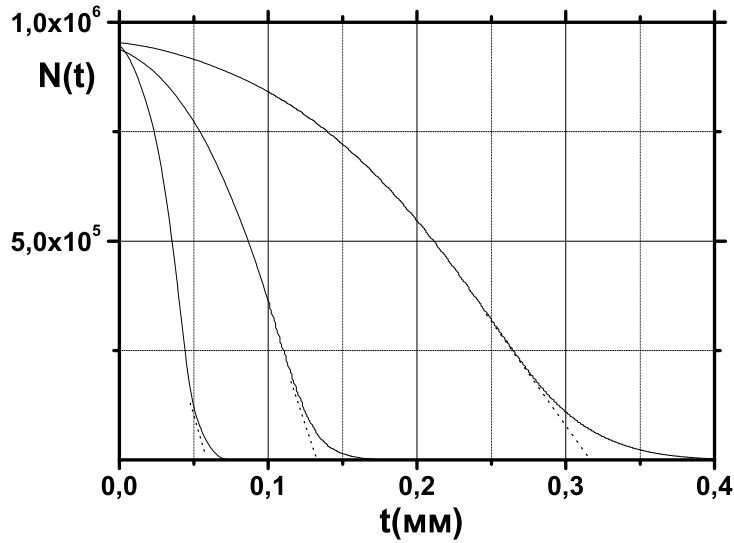


Рис. 9.

Число электронов с начальной энергией 0.5, 1.0 и 2.0 МэВ, прошедших слой кремния, толщиной  $t$ .

На рис.9 показано число электронов, прошедших через слой вещества различной толщины. Кривые рассчитывались с использованием программы GEANT, прослеживалось прохождение  $10^6$  электронов. Полученное распределение электронов следует сравнить с таким же распределением для протонов, показанном на рис. 6. Для электронов интенсивность пучка начинает убывать уже при небольших толщинах. К оси  $X$ , где отложена толщина поглотителя, кривая подходит под малым углом и определить точку пересечения кривой с осью  $X$  как пробег электронов на эксперименте очень трудно, т.к. интенсивность пучка здесь мала. Поэтому для электронов вводят понятие экстраполированного пробега, за который принимают точку пересечения продолжения прямолинейного участка кривой поглощения с осью абсцисс.

Число электронов, прошедших слой вещества с толщиной близкой к нулю меньше числа падающих на слой. В результате многократного рассеяния часть электронов вылетает из слоя вещества в направлении противоположном вектору скорости падающих электронов. Этот эффект называют отражением электронов от слоя вещества. В случае, показанном на рис. 9, этот эффект составляет  $\sim 5\%$ .

Из экспериментальных данных установлено, что экстраполированный пробег монохроматических электронов пропорционален их начальной энергии. Например, для поглотителя из алюминия эта связь имеет вид

$$R (z/cm^2) = 0.46E^{1.4} \quad \text{при } E < 0.8 \text{ МэВ}$$

$$R (z/cm^2) = 0.54E - 0.133 \quad \text{при } E > 0.8 \text{ МэВ}$$

Экстраполированный пробег электронов в веществе с зарядом  $Z$  и массовым числом  $A$  связан с пробегом в алюминии следующим образом:

$$R(A, Z) (z/cm^2) = R(Al)(Z/A)_{Al}/(Z/A)$$

Аналогичные зависимости получены для электронов  $\beta$  – распада, имеющих непрерывный спектр. Для электронов  $\beta$  – распада с граничной энергией  $E_\beta$  выше 0.8 МэВ экстраполированный пробег в алюминии равен

$$R (z/cm^2) = 0.542E_\beta(MэВ)$$

### 3.3 Тормозное излучение электронов при прохождении через вещество.

Если частица с зарядом  $ze$  движется с ускорением  $\dot{v}$ , то в этом процессе происходит излучение электромагнитных волн. Энергия, уносимая излучением, возникает за счет энергии частицы. Это излучение называется тормозным, а потери энергии частицы на это излучение называются радиационными.

В классическом приближении интенсивность  $W$  (энергия, излучаемая в секунду) тормозного излучения определяется соотношением

$$W = \frac{2}{3} \frac{e^2 z^2}{c^2} |\dot{v}|^2$$

Учтем, что  $\dot{v} = a = F/m$ , где  $a$  – ускорение частицы,  $F$  – сила, действующая на частицу. Эта сила зависит от характеристик частицы, с которой взаимодействует налетающая частица:  $m_p$  – масса частицы и ее заряд  $Z_p$ . Тогда кулоновская сила  $F \sim zZ_p$ . Интенсивность излучения пропорциональна множителю  $z^2 \cdot z^2 Z_p^2 / m^2 n$ , где  $n$  – число частиц, с которыми взаимодействует налетающая частица, в единице объема.

Отсюда следует, что радиационные потери у электрона в некоторой среде в  $(m_e/m_p)^{-2} \sim 3.7 \cdot 10^6$  больше, чем у протона в той же среде. У ионов тяжелее протона эти потери еще меньше. Поэтому радиационные потери имеет смысл учитывать только для электронов.

Сравним радиационные потери для взаимодействия налетающей частицы с электронами атомов среды и ядрами атомов. Число электронов в единице объема  $\sim nZ$ , а число ядер  $\sim n$ . Интенсивность излучения при взаимодействии с ядром в  $Z^2$ , больше, чем при взаимодействии с электроном. Число электронов в  $Z$  раз больше, чем число ядер, так что потери на излучение из-за взаимодействия с ядрами в  $Z$  раз больше, чем потери из-за взаимодействия с электронами среды. Поэтому далее будем учитывать только потери на излучение при взаимодействии электрона с ядрами.

Величина радиационных потерь электронов характеризуется величиной потерь энергии на единице пути  $\left(\frac{dE}{dx}\right)_{\text{рад}}$ . Вычисление этой величины выполняется с учетом квантовых и релятивистских эффектов и является сложной задачей. Приведем конечный результат, который имеет простой вид

$$-\left(\frac{dE}{dx}\right)_{\text{рад}} = \frac{E}{t_r},$$

где  $E$  – энергия электрона,  $t_r$  – функция от  $E$  и  $Z$ , называемая радиационной длиной. Для энергий электронов  $E \gg 137 \cdot mc^2 / Z^{1/3}$  радиационная длина практически не зависит от энергии и равна

$$\frac{1}{t_r} \approx 2 \cdot 10^{-27} Z^2 n \ln(183/Z^{1/3})$$

При меньших энергиях эта зависимость имеет вид

$$\frac{1}{t_r} \approx 6 \cdot 10^{-28} Z^2 n \left[ 4 \ln(2E/(mc^2)) - 4/3 \right]$$

Из этих формул следует, что зависимость  $t_r$  от энергии электрона либо отсутствует, либо слабая – логарифмическая. Поэтому обычно  $t_r$  считается постоянной величиной, имеющей определенное значение для каждого вещества.

На рис. 10 сравниваются удельные потери энергии электронов на ионизацию и излучение в зависимости от энергии электрона для свинца.

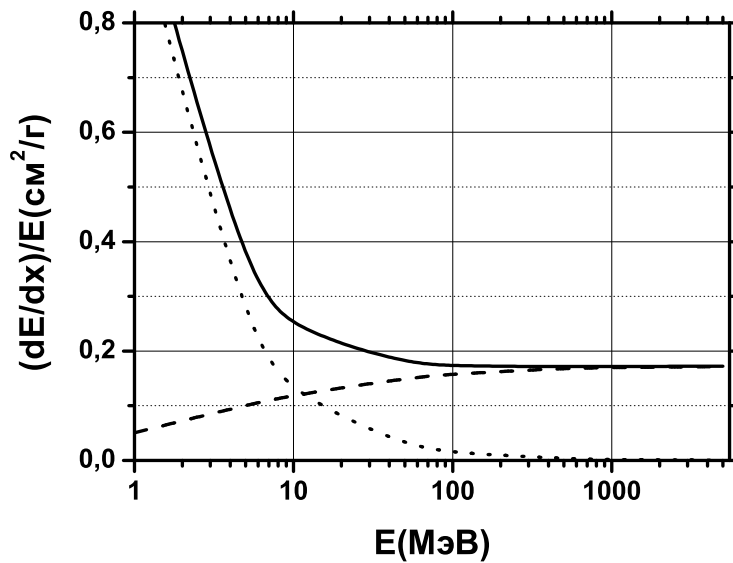


Рис. 10.

Удельные потери энергии электронов на ионизацию (точки), излучение (штрихи), сумма этих потерь (сплошная линия) в зависимости от энергии электрона для свинца.

Радиационные потери электронов растут линейно с ростом энергии, а ионизационные растут логарифмически при  $v \approx c$ . При некоторой энергии электронов радиационные потери превысят ионизационные (см. рис. 10). Эта энергия, при которой эти потери равны, называется критической. Приближенное соотношение между радиационными и ионизационными потерями имеет вид

$$\frac{\left( \frac{dE}{dx} \right)_{\text{рад}}}{\left( \frac{dE}{dx} \right)_{\text{ион}}} \approx \frac{EZ}{1600mc^2}$$

Из этого равенства следует приближенное значение критической энергии

$$E_{\text{крит}} (\text{МэВ}) = 800/Z$$

Таблица 2. Радиационные длины и критическая энергия для электронов, проходящих через некоторые среды.

Вещество	Z	A	$t_r$ в $\text{г}/\text{см}^2$	$t_r$ в $\text{см}$	Критическая энергия в $\text{МэВ}$
Водород	1	1.008	62.8	7500м	350
Гелий	2	4.003	93.1	5600м	250
Графит	6	12.010	43.3	16.9	79
Азот	7	14.008	38.6	331м	85
Кремний	14	28.090	22.2	9.52	37.5
Железо	26	55.85	13.9	1.77	20.7
Серебро	47	109.88	9.0	0.86	11.9
Свинец	82	207.21	6.4	0.57	7.4

Если энергия электрона велика настолько, что основные потери энергии являются радиационными, то потери определяются соотношением

$$-\frac{dE}{dx} = \frac{E}{t_r}$$

Решение этого дифференциального уравнения есть

$$E = E_0 \cdot e^{-\frac{x}{t_r}}$$

Отсюда вытекает, что при прохождении слоя вещества в одну радиационную длину энергия электрона за счет радиационных потерь убывает в  $e$  раз.

В таблице 2 приведены радиационные длины и критическая энергия для некоторых веществ.

Энергия, теряемая электроном на тормозные потери, уносится квантами, энергетический спектр которых простирается от квантов инфракрасного диапазона до гамма – кванта, уносящего значительную часть энергии электрона. В среднем на пути в одну радиационную длину электрон с энергией выше критической испускает один квант с энергией порядка энергии электрона и несколько квантов меньших энергий.

Дифференциальное сечение образования гамма – кванта с энергией  $E_\gamma$  при прохождении электрона с энергией  $E_e$  через вещество с зарядом ядра  $Z$  получено с использованием методов квантовой электродинамики. Оно имеет сложный вид, аналитическое выражение может быть получено в разных диапазонах энергии кванта и электрона [2]. Можно записать для этого сечения выражение

$$\frac{d\sigma(E_e, E_\gamma)}{dE_\gamma} = \frac{4Z^2\alpha r_0^2}{E_\gamma} F(E_e, u),$$

где

$$u = \frac{E_\gamma}{E_e} \quad \alpha = 1/137$$



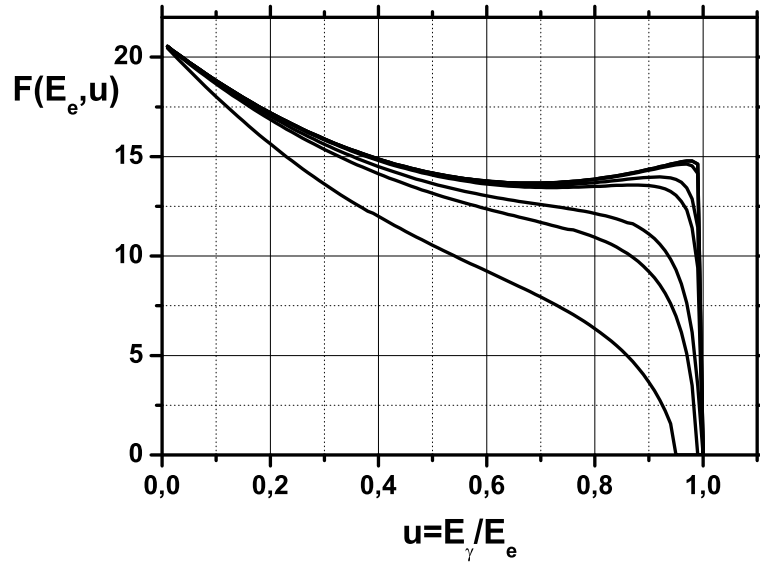


Рис. 11.

Вид функции  $F(E_e, u)$  для электронов с энергиями  $E_e = 10, 50, 100, 500, 1000$  и  $5000$  (в  $MэВ$ ); кривые расположены для указанных энергий снизу вверх.

Функция  $F(E_e, u)$  может быть получена в борновском приближении с поправками к нему. Вид этой функции показан на рис. 11.

Энергетический спектр тормозных квантов при больших энергиях электронов довольно плоский, т.е. велика вероятность испускания фотона с энергией порядка энергии электрона. Так как в этом процессе возможна потеря электроном такой большой энергии, то это приводит к большим флуктуациям в величине потери энергии электроном при прохождении слоя вещества. Эти флуктуации существенно выше, чем у тяжелой частицы.

Угол, под которым вылетают фотоны, по порядку величины равен  $mc^2/E$  и не зависит от энергии кванта. Фотоны вылетают преимущественно вперед. Для энергии электрона  $E = 10 MэВ$  этот угол равен  $\sim 3^\circ$ .

При энергии электрона существенно большей  $2mc^2$  возможно появление квантов, способных образовать при взаимодействии кванта с ядром пару  $e^+ - e^-$ . Остаток энергии кванта переходит в кинетическую энергию рожденных электрона и позитрона. Эти частицы вновь будут терять энергию в процессе радиационного торможения, и вновь рожденные кванты также могут образовывать пару  $e^+ - e^-$ . Это и есть процесс рождения электронно – фотонной лавины, распространяющейся в веществе. Эти процессы развиваются при прохождении космических частиц через атмосферу Земли. Они используются для измерения энергии частиц высоких энергий в экспериментах.

## 4 Многократное рассеяние заряженных частиц.

### 4.1 Угловое распределение частиц после прохождения слоя вещества.

Кулоновское взаимодействие частицы с электронами и ядрами среды приводит к потере энергии частицей. Но в каждом одиночном акте взаимодействия частица изменяет направление своего движения на некоторый угол. Для описания углового распределения рассеянных частиц используем сферическую систему координат – углы  $\theta$  и  $\varphi$ . Вероятность отклонения на угол  $\theta$  и  $-\theta$  равны, т.к. вероятность рассеяния не зависит от угла  $\varphi$ . Поэтому суммирование большого числа малых отклонений частицы на пути через слой вещества даст значение близкое к 0. Это означает, что средний угол отклонения частицы от начального направления движения  $\bar{\theta}$  при прохождении слоя вещества равен нулю:  $\bar{\theta} = 0$ . Но величина среднего квадрата угла отклонения  $\theta^2$  отлична от нуля. Найдем эту величину, которую мы будем обозначать как  $D_\theta$ .

Вероятность отклонения в акте рассеяния частицы в телесный угол  $\Omega$  определяется дифференциальным сечением рассеяния  $d\sigma/d\Omega(\theta)$ . Используя эту величину, запишем

$$D_\theta = \overline{\theta^2} = \int_{\theta_{min}}^{\theta_{max}} \theta^2 \frac{d\sigma}{d\Omega} n t d\Omega, \quad (4)$$

$n$  – число рассеивателей в единице объема,  $t$  – толщина слоя, через который прошла частица.

Частица рассеивается на электронах атомов и ядрах среды. Сечение рассеяния описывается формулой Резерфорда. Величина сечения пропорциональна квадрату заряда рассеивателя. Для рассеивателя электрона эта величина равна 1, а для ядра  $Z^2$ . Число электронов в среде пропорционально  $Z$ . Для рассеяния на электронах среды  $d\sigma/d\Omega n \sim Z$ , для рассеяния на ядрах среды  $d\sigma/d\Omega n \sim Z^2$ , отсюда следует, что вероятность рассеяния на ядре на данный угол больше в  $Z$  раз, чем на электроны. Поэтому  $\overline{\theta^2}$  определяется в основном рассеянием на ядрах.

Формула Резерфорда для частицы с зарядом  $z$ , энергией  $E$  и массой  $m$ , рассеивающейся на ядре с зарядом  $Z$  и массой  $M$  при условии  $M \gg m$  имеет вид

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{z^2 Z^2 e^4}{16E^2 \sin^4(\theta/2)} \quad (5)$$

Проинтегрировав эту формулу по углам  $\theta_1 \leq \theta \leq \pi$ ,  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ , получим интегральное сечение рассеяния на углы, превышающие  $\theta_1$

$$\sigma(\theta_1) = \frac{\pi e^4 z^2 Z^2 (\theta_1/2)}{4E^2 \sin^2 \theta/2} \quad (6)$$

В (4) нужно задать численные значения пределов интегрирования. Верхний предел соответствует максимально возможному углу отклонения при данной толщине слоя. Строго говоря, это понятие не определяется точно. Возможно и при малой толщине отклонение на большой угол, но такие события редки. Поэтому для оценки выберем следующий принцип: при заданной толщине слоя за максимальный угол отклонения

$\geq \theta_1$  примем такой, для которого частица хотя бы один раз отклониться на этот или больший угол.

Пусть частица проходит слой толщиной  $t$  и число атомов в единице объема равно  $n$ . Число столкновений  $N$  с отклонением на угол больший  $\theta_1$  на этом пути найдем, умножив (6) на  $tn$ .

$$N = \sigma(\theta_1)nt = \pi e^4 z^2 Z^2 nt / (4E^2 \sin^2(\theta_1/2))$$

Угол  $\theta_1$  мал даже при толщине слоя порядка длины пробега частицы в этом веществе. За угол  $\theta_1$  примем такой угол, для которого число отклонений  $N = 1$ .

$$1 = \sigma(\theta_1)nt = \pi e^4 z^2 Z^2 nt / (4E^2 \sin^2(\theta_1/2)) = \pi e^4 z^2 Z^2 nt \frac{1}{\theta_1^2} / E^2$$

Следовательно

$$\theta_1^2 = \pi e^4 z^2 Z^2 nt / E^2$$

Угол  $\theta_{\text{мин}}$  определим, считая что он порядка отношения длины волны частицы  $\lambda$  к размеру атома  $R_{\text{атом}}$

$$\theta_{\text{мин}} \approx \lambda / R_{\text{атом}}$$

$\lambda = \hbar/p$ ,  $R_{\text{атом}} = \frac{\hbar^2}{me^2} / Z^{1/3}$  – боровский радиус.

Проинтегрировав (4), где за  $d\sigma/d\Omega$  возьмем (5), а угол  $\theta$  будем полагать малым, получим

$$\bar{\theta}^2 = \pi e^4 z^2 Z^2 nt \ln \frac{\theta_1}{\theta_{\text{мин}}} / E^2 \quad (7)$$

Подставим найденные выражения для  $\theta_{\text{мин}}$  и  $\theta_1$  и получим

$$\bar{\theta}^2 = 0.078 z^2 Z^2 t \ln[1.06 \cdot 10^2 z Z^{2/3} \sqrt{t/A/\beta}] / (AE^2) \quad (8)$$

В этой формуле  $A$  – атомный вес вещества,  $\beta = v/c$ : энергия берется в  $MэВ$ , толщина слоя в  $г/см^2$

Для оценки угла многократного рассеяния рассмотрим два примера. Возьмем протоны с энергией  $8.01 MэВ$ , их пробег в кремнии равен  $500 мкм$ . После прохождения через кремниевую пластинку толщиной  $100 мкм$  их энергия уменьшается до  $6.98 MэВ$ , пробег таких протонов в кремнии  $400 мкм$ . Этому соответствует  $\sqrt{\bar{\theta}^2} = 0.075 рад = 4.3^\circ$ .

Альфа – частицы с пробегом в кремнии  $500 мкм$  имеют энергию  $32.2 MэВ$ . После прохождения той же пластинки их энергия составляет  $28.3 MэВ$ . Этому соответствует  $\sqrt{\bar{\theta}^2} = 0.040 рад = 2.3^\circ$ .

В случае релятивистских частиц с энергией  $E \gg mc^2$

$$\bar{\theta}^2 \sim z^2 t / (p^2 \beta^2) \quad \text{и} \quad \sqrt{\bar{\theta}^2} = z \sqrt{t} / p \beta$$

В качестве иллюстрации прохождения частиц через вещество на рис. 12 показаны проекции траектории электрона и протона с энергией  $10 MэВ$  в плоскости  $XZ$ , распространяющегося в кремнии. Источник электронов расположен в точке с координатами  $(0,0)$ . Частицы вылетают по нормали к плоскости  $XY$ . По осям отложена

координата, деленная на пробег частиц в веществе. Для электронов с энергией  $10 \text{ МэВ}$  экстраполированный пробег равен  $2.3 \text{ см}$ , пробег протонов с энергией  $10 \text{ МэВ}$  равен  $0.07 \text{ см}$ . На рис. показаны данные для десяти историй прохождения частиц. Расчеты траекторий были выполнены по программе GEANT [7]. Программа прослеживает прохождение частицы пока ее энергия не уменьшится до величины  $10 \text{ кэВ}$ .

В выбранных единицах по оси  $X$  отложена величина близкая к проекции угла отклонения частицы на ось  $X$ . Ни одна из траекторий электронов не достигает значения  $z/R = 1$ . Действительно, как видно из рис.9, число электронов с пробегом равным экстраполированному мало. Почти для всех протонов, как видно из рис.12,  $z/R \sim 1$ ; это означает, что страглинг мал по сравнению с пробегом (сравните с рис.6).

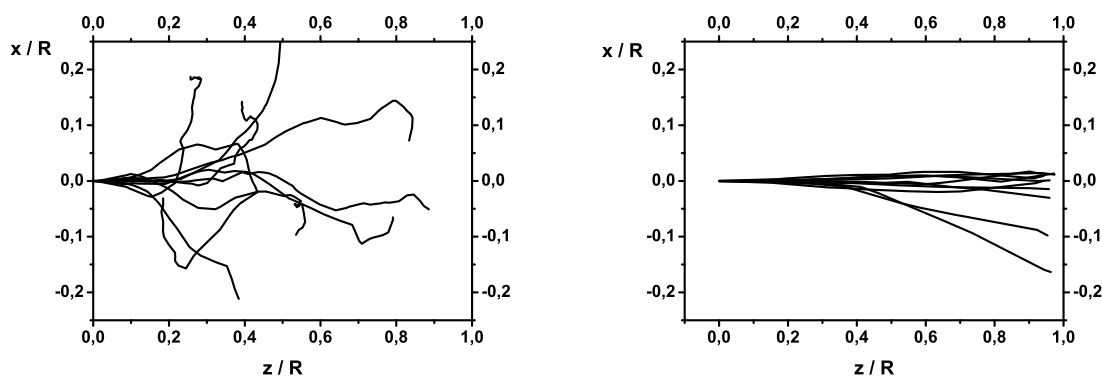


Рис. 12. Траектории электронов (слева) и протонов (справа).

Рассмотрим детально характеристики энергетического и углового распределения протонов после прохождения ими различных по толщине слоев кремния. Первичный пучок протонов с энергией  $10 \text{ МэВ}$  падает по нормали на пластинку из кремния. Толщина слоя кремния меньше пробега первичных протонов.

На рис. 4.1 и 4.1 показаны спектры протонов и их угловое распределение, прошедших через толщину  $0.005 \text{ см}$ ; на рис. 4.1 и 4.1 для толщины  $0.025 \text{ см}$ ; на рис. 4.1 и 4.1 для толщины  $0.032 \text{ см}$ . Зависимости получены расчетом 200000 историй прохождения протонов через слой. Расчет выполнен по программе GEANT.

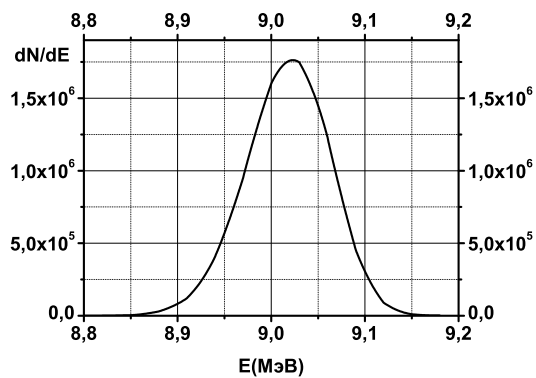


Рис. 13.  
Энергетический спектр протонов.

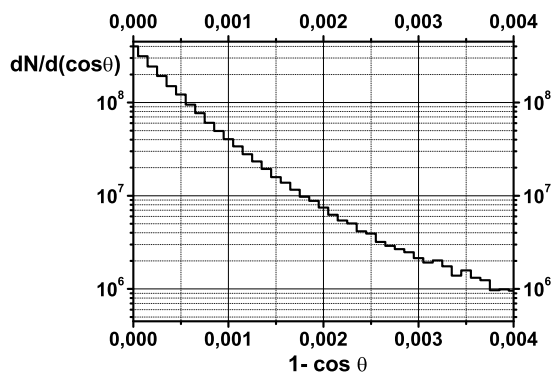


Рис. 14.  
Распределение протонов по углу  $\theta$ .

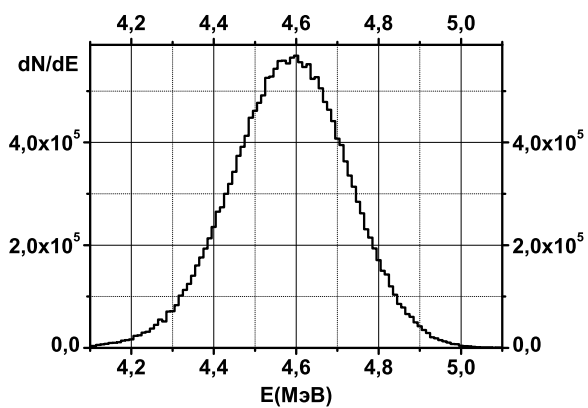


Рис. 15.  
Энергетический спектр протонов.

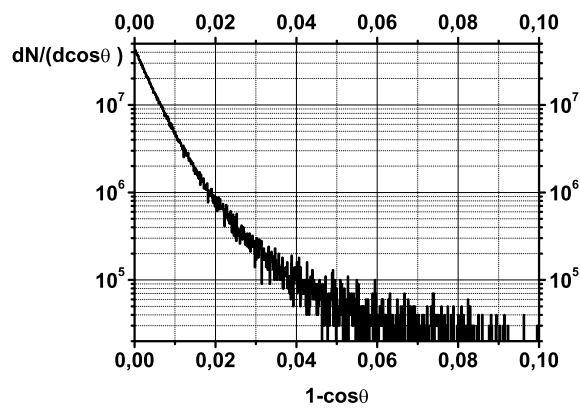


Рис. 16.  
Распределение протонов по углу  $\theta$ .

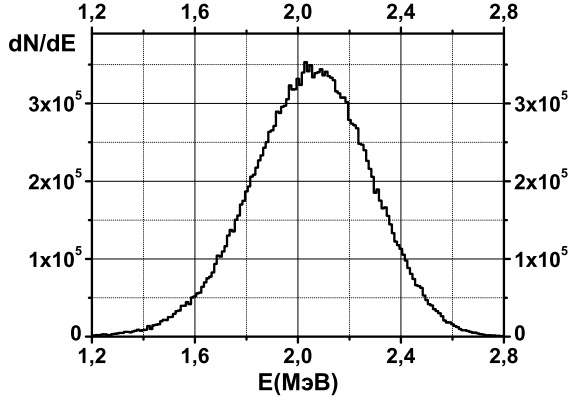


Рис. 17.

Энергетический спектр протонов.

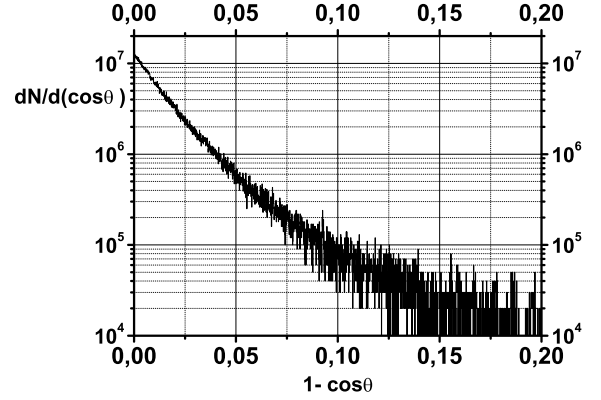


Рис. 18.

Распределение протонов по углу  $\theta$ .

## 4.2 Флуктуации ионизационных потерь.

Частица, проходя слой вещества толщиной  $t$ , теряет в нем энергию  $\bar{\varepsilon} = dE/dx \cdot t$ . Мы ввели обозначение  $\bar{\varepsilon}$  для того, чтобы подчеркнуть то обстоятельство, что эта величина имеет смысл среднего значения, усредненного по большому числу историй прохождения частиц с одинаковой начальной энергией через один тот же слой вещества. Очевидно, что величина  $\varepsilon$  флуктуирует и имеет распределение, которое можно охарактеризовать функцией  $p(E_0, \varepsilon), t d\varepsilon$ . Вид этой функции зависит от толщины слоя вещества. Если  $t$  достаточно мало, так что в слое происходит только одно столкновение частицы с атомом среды, то это распределение описывается распределением Ландау, по имени автора, впервые вычислившего это распределение ([3]).

Энергетический спектр энергетических потерь частицей в тонком слое описывается выражением

$$N(t, \varepsilon) = \frac{1}{\xi} \varphi(\lambda)$$

Здесь

$$\xi = \frac{2\pi z^2 e^4 N_A Z \rho t}{m_e \beta^2 c^2 A}$$

$$\varphi(\lambda) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \exp(u \ln(u) + \lambda u) du$$

$$\lambda = \frac{\varepsilon - \bar{\varepsilon}}{\xi} - 1 - C_e - \beta^2 - \ln \frac{\xi}{E_{e, E_{max}}}$$

$$C_e = 0.577215 \quad \text{постоянная Эйлера}$$

$\bar{\varepsilon}$  — средняя потеря энергии в слое  $t$

$\varepsilon$  — потеря энергии в слое  $t$

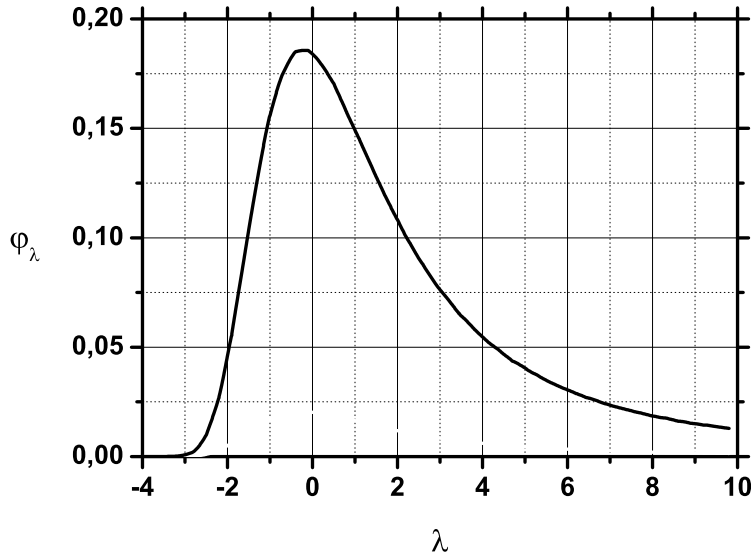


Рис. 19.  
Универсальная функция Ландау .

Функция  $\varphi(\lambda)$  называется универсальной функцией Ландау. Она зависит от одной переменной  $\lambda$ . Эта функция показана на рис. 19. Универсальность достигается тем, что при получении этой функции вводится допущение, состоящее в том, что максимальная энергия, переданная электрону в одном соударении считается равной бесконечности.

Распределением Ландау можно пользоваться при  $k = \frac{\xi}{E_{e,max}} < 0.01$ . Распределение ассиметрично относительно  $\bar{\varepsilon}$ , оно медленно спадает в области  $\varepsilon > \bar{\varepsilon}$ . Это объясняется тем, что существуют столкновения в которых электрон, выбиваемый из атома, имеет большую энергию вплоть до максимально возможной  $E_{e,max}$ . Эта величина определяется выражением

$$E_{e,max} = \frac{W^2 - (Mc^2)}{Mc^2 \left[ \frac{M}{2m_e} + \frac{m_e}{2M} + \frac{W}{Mc^2} \right]}$$

Здесь  $W$  – полная энергия частицы с массой  $M$ ,  $m_e$  – масса электрона. При релятивистских энергиях, когда  $W \gg Mc^2$ ,  $E_{e,max} \approx W$ . Вероятность больших потерь убывает как  $E_e^{-2}$ , где  $E_e$  – энергия выбитого из атома электрона.

Вавилов [4] развил теорию Ландау для значений  $0.01 < k < 10$ . Эта теория наиболее сильно отличается от теории Ландау в области нерелятивистских энергий частиц и в сравнительно легких средах (до  $Z \leq 10 - 15$ ). В случае электронов эти энергии порядка сотни *КэВ*. Вавилов устранил предположение о том, что максимальная переданная энергия электрону равна бесконечности. Полученное им выражение для

распределения энергетических потерь имеет вид

$$N(t, \varepsilon) = \frac{1}{\xi} \varphi(\lambda_v, k, \beta^2)$$

Здесь

$$\varphi_v(\lambda_v, k, \beta^2) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \phi(s) e^{\lambda s} ds$$

$$\phi(s) = \exp[k(1 + \beta^2 \gamma)] \exp[\psi(s)]$$

$$\psi(s) = s \ln k + (s + \beta^2 k) [\ln(s/k) + E_1(s/k)] - k e^{-s/k}$$

$$E_1(z) = \int_z^{\infty} t^{-1} e^{-t} dt$$

$$\lambda_v = k \left[ \frac{\epsilon - \bar{\epsilon}}{\xi} - C'_e - \beta^2 \right] \quad C'_e = 1 - C_e$$

На рис.20 изображена функция Вавилова, рассчитанная для значения  $\beta^2=0.5$  и ряда значений параметра  $k$ . Для малых толщин вещества, чему соответствуют значения  $k \leq 0.01$  функция Вавилова совпадает с универсальной функцией Ландау. На рис.20 эта функция соответствует функции с минимальным значением в максимуме. С ростом  $k$ , т.е. с увеличением толщины слоя вещества, налетающая частица испытывает все большее число взаимодействий с электронами среды. Это приводит к тому, что ширина кривой распределения уменьшается, а так площадь всей кривой распределения составляет единицу, то уменьшение ширины кривой приводит к росту значения распределения в максимуме.



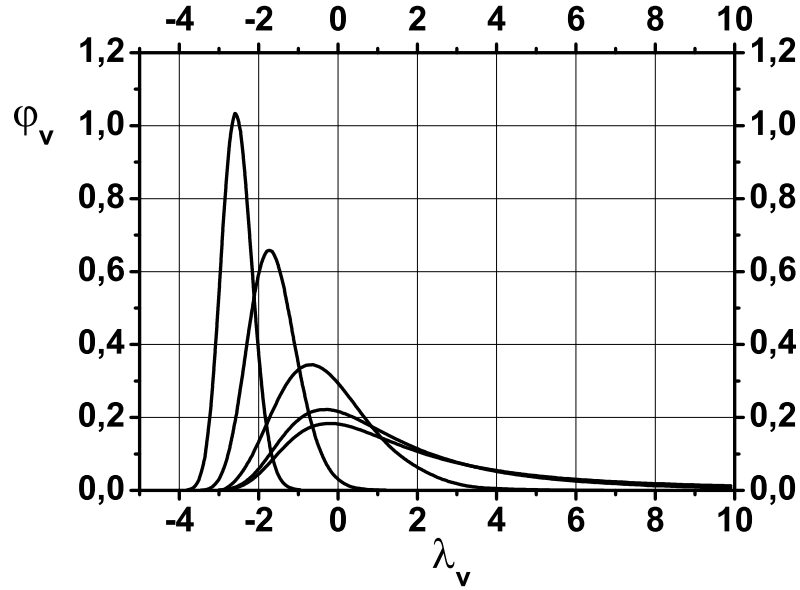


Рис. 20.

Функция Вавилова, рассчитанная для следующих значениях параметров:  $\beta^2=0.5$ ,  $k=0.01, 0.1, 0.5, 2.5, 10$ .

параметров:  $k=0.5$ . При значительных толщинах  $k > 10$  частица будет испытывать в слое много столкновений и при достаточно большом числе этих столкновений вероятность распределения потерь будет описываться распределением, приближающимся к нормальному. Кривая на рис.20 для значения  $k=10$  практически совпадает с нормальным распределением. На рис.21 (слева) изображена функция Вавилова, рассчитанная для значения  $k=0.5$  и ряда значений параметра  $\beta^2=0.1, 0.25, 0.5, 0.75, 0.99$ . Значению  $\beta^2=0.1$  соответствует кривая с наименьшим значением в максимуме кривой, значению  $\beta^2=0.99$  – с наибольшим. Зависимость от энергии налетающих частиц слабая, это связано с тем, что кривые рассчитаны для области энергий соответствующих экспоненциальному росту удельных потерь.

На рис.21 (справа) изображена функция Вавилова, рассчитанная для значений  $k=5, 10$  и ряда значений параметра  $\beta^2=0.05, 0.5$ . Выбранным значениям  $k$  соответствуют распределения близкие к нормальному.

Если толщина вещества достаточна для того, чтобы распределение потерь описывалось нормальным законом, то оно имеет вид

$$f(\varepsilon, t) \simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp\left[-\frac{(\varepsilon - \bar{\varepsilon})^2}{2\sigma^2}\right]$$

$$\sigma^2 = \frac{\xi^2}{k}(1 - \beta^2/2) = \xi E_{e,max}(1 - \beta^2/2)$$

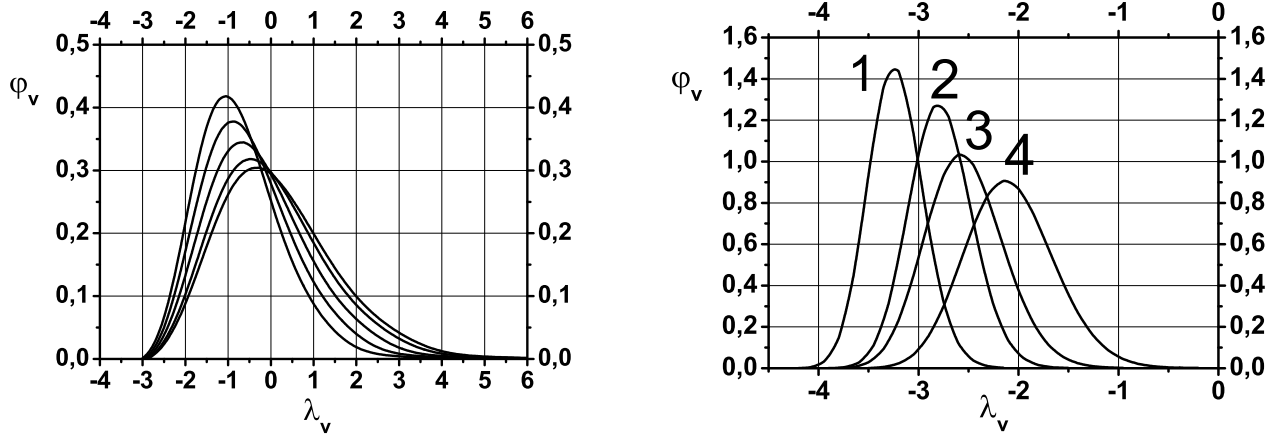


Рис. 21. Слева – функция Вавилова, рассчитанная для следующих значениях параметров:  $k=0.5$ ,  $\beta^2=0.1, 0.25, 0.5, 0.75, 0.99$ . Справа – функция Вавилова, рассчитанная для следующих значениях параметров  $\beta^2$  и  $k$ : 1– (0.5 и 10) ;2– (0.05 и 10) ;3– (0.5 и 5) ;4– (0.05 и 5).

Оценим каким распределением следует пользоваться для следующего достаточно типового случая. Пусть имеется детектор из кремния толщиной 100  $\mu\text{м}$ . Он установлен в поле частиц, имеющих импульс  $p = 10 \text{ ГэВ}$ . Тогда для электронов, пионов, протонов  $\beta \simeq 1$ . Для этих значений параметр  $\xi \approx 6.5 \cdot 10^{-3} \text{ МэВ}$ , а  $E_{e,max} \approx p$ . Тогда  $\xi/E_{e,max} \approx 6.5 \cdot 10^{-3}/10^4 \approx 6.5 \cdot 10^{-7}$ . Здесь очевидно следует применять распределение Ландау. Даже для  $p = 1 \text{ ГэВ}$  этот вывод не измениться.

## 5 Прохождение гамма – квантов через вещество.

Так как гамма – кванты не несут электрического заряда, то при прохождении их через вещество необходимо рассматривать процессы взаимодействия квантов с атомами и ядрами вещества. Основными процессами являются комптоновское рассеяние, фотоэффект и рождение пар.

Важной особенностью этих процессов состоит в том, что в первом из них кроме потери энергии квант меняет направление своего движения вплоть до противоположного начальному. В двух остальных квант исчезает. Конечным результатом прохождения пучка монохроматических гамма – квантов, падающих под одним углом на слой вещества, состоит в уменьшении числа квантов, в появлении энергетического и углового распределений квантов.

Число гамма – квантов, прошедших через слой вещества толщиной  $t$ , связано с числом падающих квантов соотношением

$$N(t) = N_0 e^{-\mu t}$$

Параметр  $\mu$  называется линейным коэффициентом ослабления; он имеет размерность  $\text{см}^{-1}$ . Пройдя толщину вещества равную  $1/\mu$ , пучок гамма – квантов ослабляется в  $e$  раз. Каждый из процессов взаимодействия гамма – квантов с веществом имеет свою величину сечения взаимодействия  $\sigma$ . Полное сечение взаимодействия складывается из суммы сечений отдельных процессов. Параметр  $\mu$  может быть выражен через  $\sigma$  соотношением  $\mu = n\sigma$ . Здесь  $n$  – число атомов в  $1 \text{ см}^3$  вещества,  $\sigma$  – сечение взаимодействия с одним атомом.

Линейный коэффициент ослабления является суммой значений  $\mu$  для каждого процесса и сложным образом зависит от энергии квантов. Далее рассмотрим характеристики отдельных процессов взаимодействия гамма – квантов с веществом.

### 5.1 Когерентное рассеяние.

Существуют процессы рассеяния кванта без потери им энергии. Рассмотрим эти процессы. Томсоновское рассеяние света – это рассеяние света на свободном покоящемся электроне без изменения частоты кванта. Сечение этого процесса существенно при малых энергиях кванта  $E_\gamma \ll mc^2$ .

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{r_0^2}{2}(1 + \cos^2 \theta)$$

Полное сечение процесса не зависит от частоты и имеет вид

$$\sigma_e = \frac{8\pi}{3} r_0^2 = 6.65 \text{ см}^2$$

Здесь  $r_0 = \frac{e^2}{mc^2} = 2.82 \cdot 10^{-13} \text{ см}$  – классический радиус электрона.

Угловая зависимость этого сечения имеет вид

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{2} r_0^2 (1 + \cos^2 \theta)$$

Для описания рассеяния кванта на электронах атома необходимо учесть структуру электронного распределения в атоме.

Сечение этого процесса, называемого когерентным или релеевским рассеянием, имеет вид

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{2} r_0^2 (1 + \cos^2 \theta) [F(\mathbf{q}, z)]^2$$

Форм-фактор  $F(\mathbf{q}, z)$  представляет вероятность того, что импульс  $\mathbf{q}$  будет передан  $z$  электронам атома без поглощения энергии. Этот фактор вычисляется по какой-либо модели атома, например, модели Томаса-Ферми. Сечение когерентного рассеяния быстро падает с ростом энергии кванта. Полное сечение этого рассеяния на атоме кремния для трех значений энергии приведено в таблице 3.

$E$ (кэВ)	$\sigma$ (барн)
10	32.6
100	7.0
1000	0.014

Таблица 3.

## 5.2 Комптоновское рассеяние.

Процесс состоит в том, что гамма – квант рассеивается на электроне атома, передает ему энергию, большую энергии связи электрона в атоме. В конечном состоянии образуется свободный электрон, рассеянный гамма – квант и ион. При рассмотрении этого процесса будем считать, что энергия гамма – кванта много больше энергии связи электрона, тогда этот процесс есть процесс рассеяния кванта на свободном электроне.

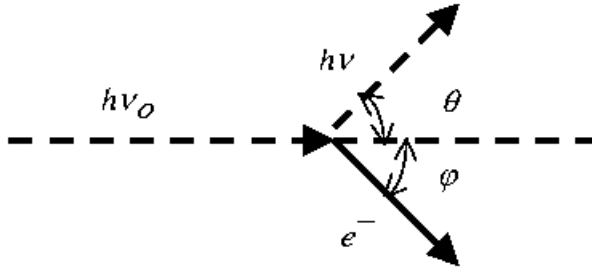


Рис. 22. Комптоновское рассеяние гамма – кванта на электроне.

На рис. 22 показана схема комптоновского рассеяния гамма – кванта на электроне. Квант с энергией  $h\nu_0$  рассеивается на электроне, появляется рассеянный квант с энергией  $h\nu$  под углом  $\theta$  и электрон с кинетической энергией  $E_e$  под углом  $\varphi$ .

Введем следующие обозначения: энергия налетающего  $\gamma$  – кванта –  $\varepsilon_0$ , энергия рассеянного  $\gamma$  – кванта  $\varepsilon$ ,  $E$  – полная энергия рассеянного электрона,  $m$  – масса электрона. Законы сохранения энергии и импульса имеют вид (скорость света полагаем равной 1; тогда для кванта импульс  $p = \varepsilon/c = \varepsilon$ )

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 &= \varepsilon + E - m \\ \varepsilon \cos \theta + \sqrt{E^2 - m^2} \cos \varphi &= \varepsilon_0 \\ \varepsilon \sin \theta &= \sqrt{E^2 - m^2} \sin \varphi \end{aligned}$$

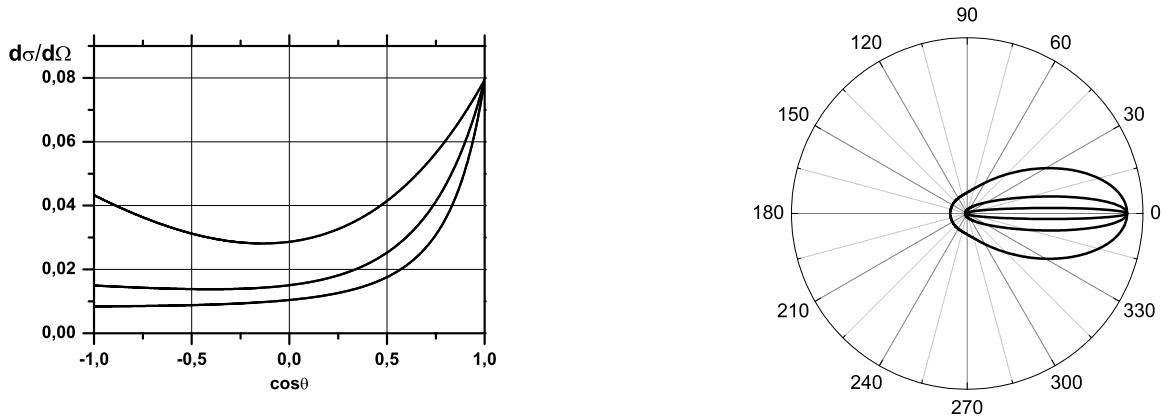


Рис. 23. Угловое распределение вторичных гамма – квантов при комптоновском рассеянии. Энергия первичного кванта 1, 10, 100 МэВ. Направление движения первичного кванта 0°. Слева - в барнах/стр, справа – нормированное распределение в полярных координатах

Энергия рассеянного гамма – кванта, полученная из этой системы уравнений (вывод см. в приложении), имеет вид

$$\varepsilon = \frac{2\varepsilon_0 m}{2[\varepsilon_0(1 - \cos \theta) + m]} = \frac{\varepsilon_0}{1 + \frac{\varepsilon_0}{m}(1 - \cos \theta)}$$

Рассеянный квант может вылетать под углом от 0° до 180°. Энергия рассеянного кванта убывает при этом от величины  $\varepsilon_0$  до  $\frac{\varepsilon_0}{1 + 2\varepsilon_0/m}$ . Если энергия кванта велика  $h\nu \gg mc^2$ , то энергия рассеянного кванта при вылете назад  $h\nu' \simeq mc^2/2 = 0.255$  МэВ.

Дифференциальное сечение комптоновского рассеяния на одном свободном электро-не имеет вид

$$\frac{d\sigma_k}{d\Omega} = \frac{r_0^2}{2} \left( \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \right)^2 \left( \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} + \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon} - \sin^2 \theta \right)$$

Здесь  $r_0 = \frac{e^2}{mc^2} = 2.82 \cdot 10^{-13}$  см - классический радиус электрона. Это формула Клейна – Нишины – Тамма. При расчете сечения для вещества ее нужно умножить на  $Z$  - заряд ядра атома вещества.

Угловое распределение рассеянных гамма – квантов показано на рис. 23. Чем больше энергия первичного кванта, тем более узким, вытянутым вперед, становится угловое распределение вторичных квантов. При  $\theta \simeq 0$  энергия рассеянного кванта близка к энергии первичного, а дифференциальное сечение комптоновского рассеяния под этим углом для всех энергий равно  $\frac{d\sigma_k}{d\Omega} = r_0^2$ .

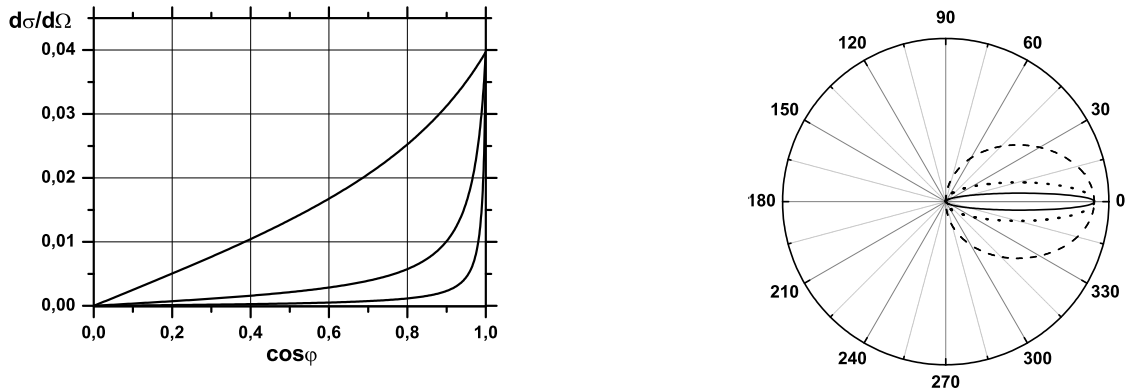


Рис. 24. Угловое распределение вторичных электронов при комptonовском рассеянии. Энергия первичного кванта 1, 10, 100 МэВ. Направление движения первичного кванта  $0^\circ$ . Слева - в барнах/стр, справа - нормированное распределение в полярных координатах

Зависимость кинетической энергии выбитого электрона от угла его вылета

$$E - m = \frac{2\varepsilon_0/m}{1 + 2\varepsilon_0/m + (\varepsilon_0/m + 1)^2 \operatorname{tg}^2 \varphi}$$

Угол вылета электрона  $\varphi$  связан с углом вылета рассеянного кванта  $\theta$  соотношением

$$\operatorname{ctg} \varphi = \left( \frac{\varepsilon_0}{m} + 1 \right) \operatorname{tg} \theta / 2$$

При изменении  $\theta$  от  $0^\circ$  до  $180^\circ$   $\varphi$  меняется от  $90^\circ$  до  $0^\circ$ . Угловое распределение выбитых электронов показано на рис. 24. Оно лежит в передней полусфере и становится более вытянутым вперед при росте энергии первичного кванта. Спектр электронов отдачи изображен на рис. 25. Это распределение имеет подъем вблизи максимально возможной энергии электронов и почти равномерное распределение при меньших энергиях. Разность между энергией падающего гамма - кванта и максимально возможной энергией электрона отдачи составляет (см. приложение)

$$\Delta = h\nu_0 - E_e^{\max} = h\nu_0 \frac{mc^2}{mc^2 + 2h\nu}$$

При  $h\nu \gg mc^2$   $\Delta \approx mc^2/2 = 0.255$  МэВ, независимо от энергии первичного кванта.

Полное эффективное сечение равно ( $q = h\nu_0/mc^2$ )

$$\sigma_c = 2\pi r_0^2 \frac{1}{q} \left( \left[ 1 - \frac{2(q+1)}{q^2} \right] \ln(2q+1) + \frac{1}{2} + \frac{4}{q} - \frac{1}{2(2q+1)^2} \right)$$

В двух крайних случаях формула упрощается: при  $q \ll 1$

$$\sigma_c \approx \frac{8\pi}{3} r_0^2 (1 - 2q)$$

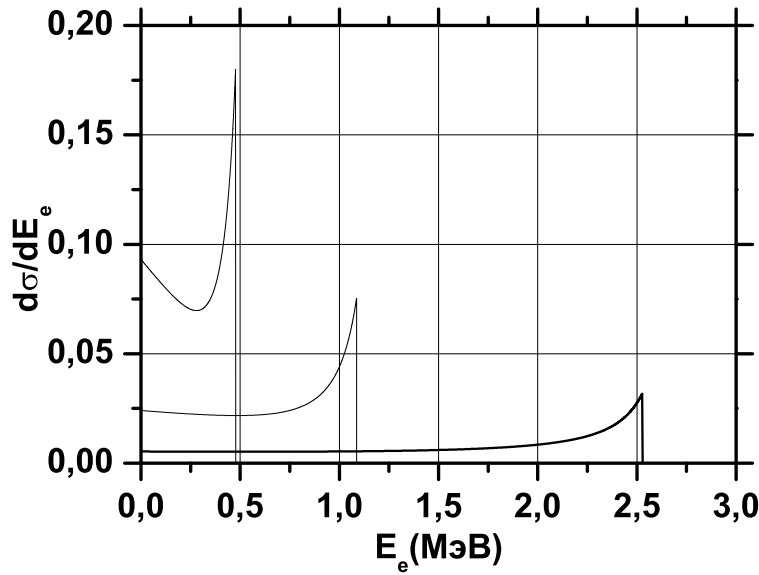


Рис. 25. Энергетическое распределение комптоновских электронов при рассеянии гамма – квантов с энергией 0.511, 1.20 и 2.76 МэВ.

при  $q \gg 1$  формула принимает вид

$$\sigma_c \approx \frac{\pi r_0^2}{q} \cdot \left( \ln 2q + \frac{1}{2} \right)$$

Зависимость эффективного сечения от энергии показана на рис. 26. При энергиях кванта больших  $\sim 50 \text{ КэВ}$  сечение комптоновского рассеяния падает как  $1/E$ .

### 5.3 Фотоэффект

Свободный электрон не может поглотить гамма – квант. Действительно, законы сохранения энергии и импульса в этом процессе имеют вид

$$h\nu = E_e; \quad h\nu/c = p_e$$

Эти два уравнения одновременно не могут быть справедливы, т.к.

$$E_e = \frac{p_e^2}{2m} = \frac{(h\nu/c)^2}{2m} = h\nu \frac{h\nu}{2mc^2} \neq h\nu$$

Фотоэффект состоит в том, что вся энергия гамма – кванта расходуется на вырывание связанного в атоме электрона. Сохранение импульса в этом процессе связано с тем, что тяжелое по сравнению с электроном ядро может получить любой необходимый импульс и, не сопровождаемый передачей энергии. Действительно при передаче ядру импульса  $\Delta p$  ядро получает энергию

$$\Delta E = (\Delta p)^2 / (2Mc^2) < E_e \cdot \frac{m}{M} \ll E_e$$

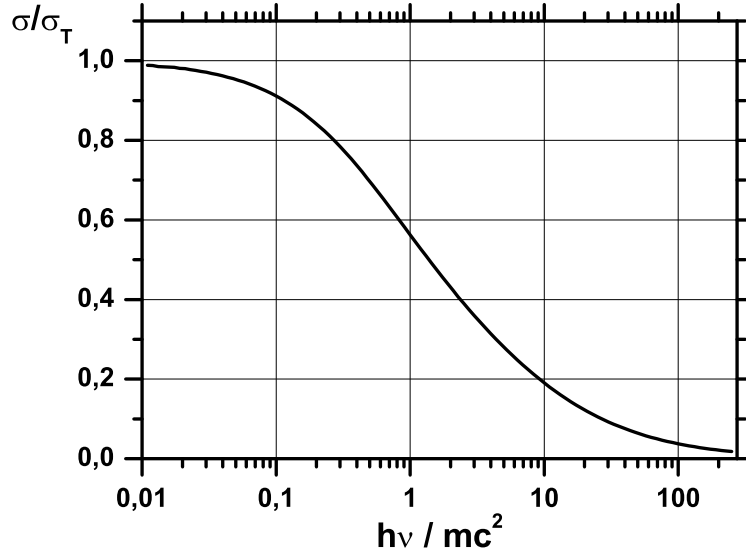


Рис. 26. Зависимость эффективного сечения комптоновского рассеяния от энергии гамма - кванта. Зависимости нормированы на сечение томпсоновского рассеяния

$$\sigma_T = \frac{8\pi}{3} r_0^2.$$

Энергия образовавшегося электрона  $E_e$  связана с энергией кванта  $h\nu$  и энергией связи электрона  $B_e$  соотношением  $E_e = h\nu - B_e$ . Электрон может быть вырван с любой занятой орбиты в атоме при выполнении условия  $h\nu \geq B_e$ . Если энергия кванта недостаточна для вырывания электрона, находящегося на  $K$  – орбите атома, то могут быть освобождены электроны с  $L$ ,  $M$  и т.д. оболочек.

Эффективное сечение фотоэффекта на  $K$  – оболочке имеет вид

$$\sigma_K = \sigma_T \frac{64}{Z^2} \left(\frac{\hbar c}{e}\right) \left(\frac{E_K}{k}\right)^{3/2} g(\eta)$$

$$\sigma_T = \frac{8}{3\pi} r_e^2 = 6.65 \cdot 10^{-25} \text{ см}^2$$

$$g(\eta) = 2\pi \sqrt{\frac{E_K}{k}} \frac{\exp(-4\eta \cdot \text{arcctg } \eta)}{1 - e^{-2\pi\eta}}$$

$$\eta = \sqrt{\frac{E_K}{k - E_K}} = \frac{Z_{\text{эфф}} e^2}{\hbar v}$$

Обозначения величин :  $k = h\nu$  – энергия кванта;  $\sigma_T$  – сечение томсоновского рассеяния;  $Z$  – заряд ядер среды;  $e$  – заряд электрона;  $k = h\nu/mc^2$ ;  $E_K$  – энергия связи электрона на  $K$  – оболочке.

Множитель  $g(\eta)$  велик вблизи края области поглощения на  $K$  – оболочке, где  $\eta \rightarrow \infty$ ,  $g(\infty) = 2\pi \exp(-4) \approx 0.12$ . Но и вдали от этого края эта функция заметно отличается от 1; так при  $k = 50E_K$   $g(\eta) \simeq 2/3$ .



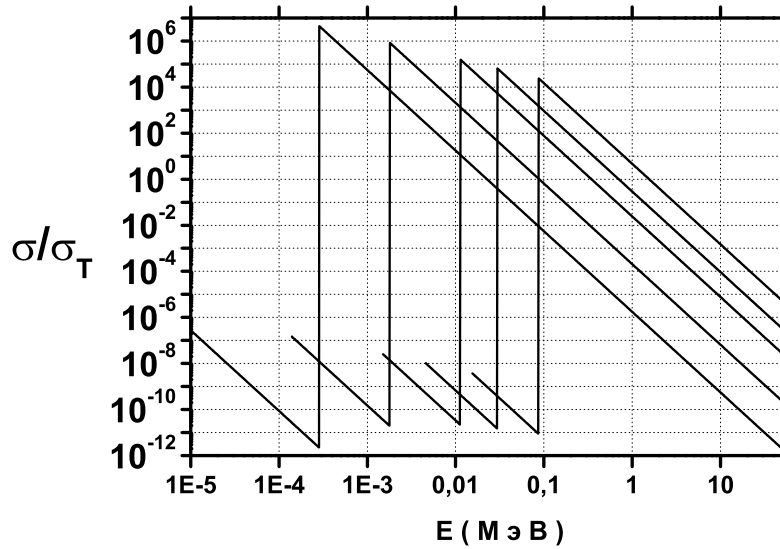


Рис. 27. Зависимость эффективного сечения фотоэффекта от энергии гамма - кванта. Зависимости нормированы на сечение томсоновского рассеяния. Рассчитаны зависимости для *C, Si, Ge, Sn* и *Pb*.

Вдали от края поглощения на *K* – оболочке при энергиях кванта  $h\nu \simeq mc^2$  зависимость сечения фотоэффекта на этой оболочке имеет вид

$$\sigma_K \sim \frac{Z^5}{(h\nu)^{7/2}}$$

В этой области энергий сечение фотоэффекта очень быстро убывает с ростом энергии кванта, и растет при увеличении заряда ядра. При больших энергиях кванта  $h\nu \gg mc^2$  убывание сечения замедляется – сечение убывает как  $\sim \frac{1}{h\nu}$ . Для элементов с большим *Z* сечение фотоэффекта имеет заметную величину при энергиях кванта несколько *МэВ*. Зависимость сечения фотоэффекта от энергии гамма – кванта показана на рис. 27 для ряда элементов. Расчет выполнен для энергии кванта, начиная с края *L* полосы для каждого элемента.

После образования фотоэлектрона в оболочке атома, в которой он находился, появляется вакантное место. Оно может заполниться электроном из выше лежащей оболочки, что сопровождается излучением монохроматического характеристического кванта. Энергия характеристического кванта может быть передана электронам внешних оболочек атома. Тогда характеристический квант отсутствует, вместо его появляются электроны (Оже – электроны). Вероятность этого процесса велика для элементов с малыми значениями заряда.

Фотоэлектроны малых энергий вылетают перпендикулярно направлению движения первичного кванта. С ростом энергии кванта фотоэлектроны вылетают под меньшими углами. Угловое распределение фотоэлектронов для гамма – квантов различных энергий показано на рис. 28. Фотоэлектроны для трех использованных на рис. энергий имеют  $\beta \sim 0.5, 0.7$  и  $0.9$  соответственно (при пренебрежении энергией связи

электрона в атоме). Угол вылета фотоэлектронов, соответствующий максимальному сечению фотоэффекта, составляет  $32^\circ$ ,  $20^\circ$  и  $13^\circ$ .

Фотоэффект является единственным из процессов взаимодействия гамма – квантов с веществом в котором образуются монохроматические электроны с энергией равной энергии кванта за вычетом энергии связи электрона в атоме. Используя детекторы, в которых вся энергия электрона преобразуется в электрический импульс, можно измерить энергию кванта. Наиболее распространенные спектроскопические детекторы гамма – излучения используют фотоэффект. В качестве детекторов используются вещества с большим  $Z$ , такие как  $Ge$ ,  $I$ ,  $Bi$ .

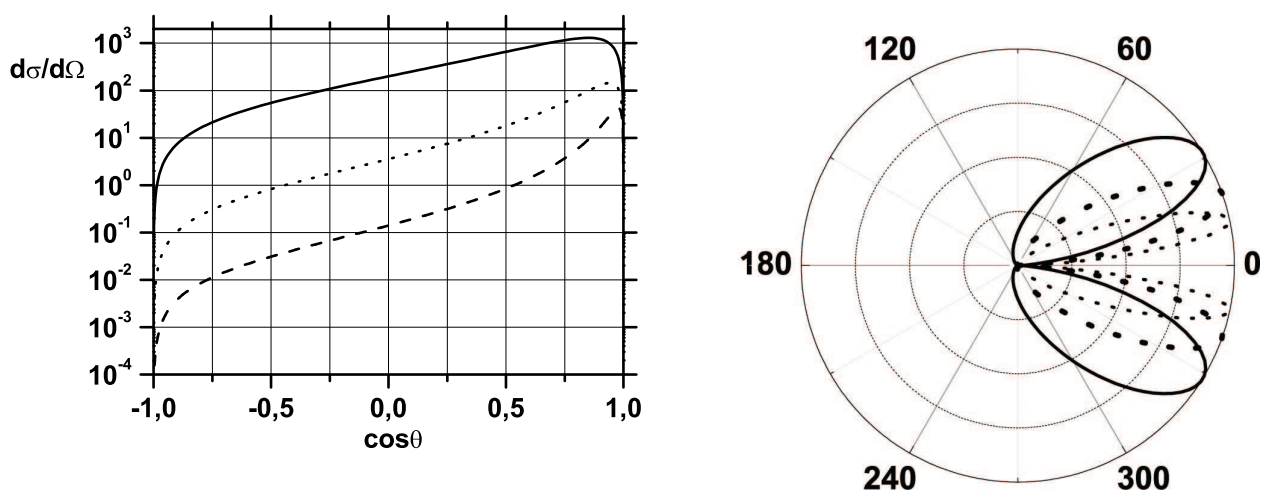


Рис. 28. Угловое распределение фотоэлектронов. Энергия первичного кванта 38, 212, 612  $КэВ$ . Направление движения первичного кванта  $0^\circ$ . Слева - в барнах/стр, нормированное на  $Z^5\alpha r_e^2$ , справа –распределение в полярных координатах, нормированное на 1 в максимуме

#### 5.4 Процесс образования пар.

При энергии гамма – кванта большей удвоенной массы электрона  $1.02 МэВ$  возможно образование пары электрон – позитрон. Этот процесс не может происходить в вакууме. Действительно, законы сохранения в этом случае имеют вид

$$h\nu = E_+ + E_-$$

$$h\nu/c = \vec{P}_+ + \vec{P}_-$$

Далее

$$h\nu = \frac{m_+c^2}{\sqrt{1-\beta_+^2}} + \frac{m_-c^2}{\sqrt{1-\beta_-^2}} = mc^2 \left( \frac{1}{\sqrt{1-\beta_+^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-\beta_-^2}} \right)$$

$$\frac{h\nu}{c} = \frac{m\vec{v}_+}{\sqrt{1-\beta_+^2}} + \frac{m\vec{v}_-}{\sqrt{1-\beta_-^2}} = mc \left( \frac{1}{\sqrt{1-\beta_+^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-\beta_-^2}} \right)$$

Последняя строка преобразуется к виду

$$\frac{\vec{v}_+}{\sqrt{1-\beta_+^2}} + \frac{\vec{v}_-}{\sqrt{1-\beta_-^2}} = \frac{c}{\sqrt{1-\beta_+^2}} + \frac{c}{\sqrt{1-\beta_-^2}}$$

Это равенство выполняется только при  $v_+ = v_- = c$ , что возможно только для гамма – кванта с бесконечной энергией. Этот процесс возможен при взаимодействии кванта с электроном или ядром, которые уносят часть импульса.

При образовании пары в поле ядра наименьший переданный ядру импульс возникнет, если электрон и позитрон вылетят по нормали к направлению кванта и по разные стороны. Тогда из сохранения импульса следует соотношение  $h\nu/c = P_N$ , где  $P_N$  - импульс ядра. Энергия ядра составляет  $E_N = P_N^2/(2A) = (h\nu)^2/2A$ . Эта величина мала, так для энергии кванта  $10\text{МэВ}$  и протона энергия протона отдачи составляет  $50\text{КэВ}$ .

Если пара рождается в поле электрона, то минимальная энергия кванта соответствует величине  $4mc^2$  (см. приложение Б).

Полное сечение образования пар на ядре с зарядом  $Z$  гамма – квантом с энергией  $k$  имеет вид

$$\sigma(k) = 4\alpha Z^2 r_e^2 \cdot \frac{7}{9} \ln \frac{2k}{mc^2} - \frac{109}{54} \quad \text{при} \quad mc^2 \ll k \ll 137mc^2 Z^{-1/3}$$

$$\sigma(k) = 4\alpha Z^2 r_e^2 \cdot \frac{7}{9} \ln(191Z^{-1/3}) - \frac{1}{54} \quad \text{при} \quad k \gg 137mc^2 Z^{-1/3} =$$

Зависимость этого сечения от энергии показана на рис. . Сечение при малых энергиях кванта быстро растет, а затем остается практически постоянным.

Энергетический спектр рожденных электронов приближенно описывается выражением

$$\frac{d\sigma(k, E)}{dE} = 4\alpha Z^2 r_e^2 \frac{dE}{k} \left[ v^2 + (1-v)^2 + \frac{2}{3}v(1-v) \right] \ln(191mc^2/Z^{1/3}) - \frac{1}{9}v(1-v) =$$

$$\alpha Z^2 r_e^2 \cdot G(E, k) \frac{dE}{k}$$

В нем  $v = E/k$ ,  $E$  – энергия электрона,  $k$  – энергия кванта. Это распределение симметрично по отношению к замене  $v$  на  $1-v$ . Функция  $G(E, k)$  изображена на рис. 29. При малых энергиях компонентов рожденной пары проявляется эффект их взаимодействия с ядром: позитрон увеличивает свою энергию, электрон уменьшает. Этот эффект растет с ростом атомного номера ядра и с уменьшением энергии кванта.

Электрон и позитрон при больших энергиях гамма – кванта испускаются под малым углом  $\sim mc^2/h\nu$  в направлении его движения.

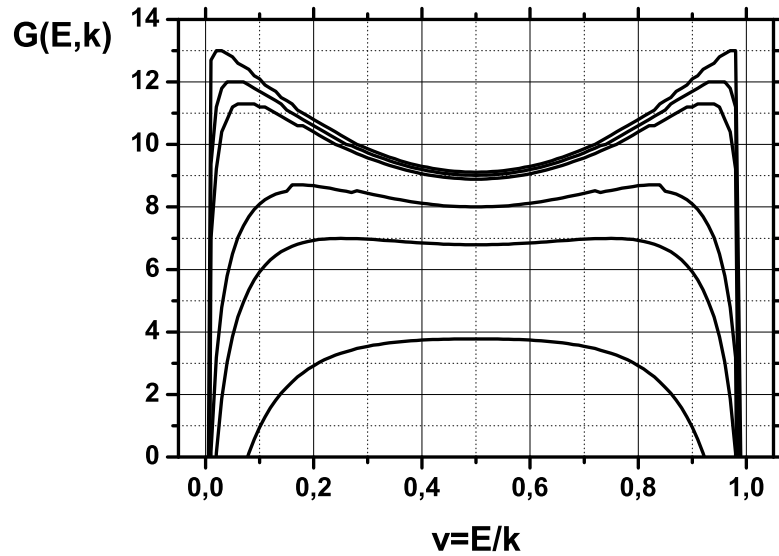


Рис. 29.

Вид функции  $G(E, k)$ ,  $k$  – энергия образовавшегося электрона,  $E$  – энергия кванта. Функция  $G(E, k)$  приведена для значений  $E$  10, 50, 100, 500, 1000 и 5000 МэВ. Соответствующие кривые размещены снизу вверх.

## 5.5 Ослабление пучка гамма – квантов при прохождении через слой вещества.

При взаимодействии гамма – квантов с веществом квант либо теряет свою энергию полностью (фотоэффект или рождение пар), либо изменяет свою энергию и направление своего движения. Если сечение взаимодействия кванта с веществом есть  $\sigma$ , то при прохождении слоя вещества толщиной 1 см вероятность взаимодействия кванта в этом слое равна  $n\sigma$ , где  $n$  – число атомов в 1 см<sup>3</sup>:  $n = \rho \frac{N_A}{A}$ .

Изменение числа гамма – квантов при прохождении ими слоя толщиной  $dx$  определяется соотношением

$$dN = -N \cdot n\sigma dx$$

Решение этого дифференциального уравнения имеет вид

$$N(x) = N_0 e^{-\mu x}, \quad (9)$$

где  $\mu = n\sigma$ . Эта величина называется линейным коэффициентом ослабления, он имеет размерность см<sup>-1</sup>. Уточним смысл уравнения (9) – если на слой падает параллельный монохроматический пучок, насчитывающий  $N_0$  квантов, уравнение дает число квантов с той же энергией и тем же направлением движения после прохождения слоя толщиной  $x$ . На рис. 30 показаны зависимость линейного коэффициента ослабления гамма – квантов в кремнии и свинце от энергии квантов. Там же показаны эти зависимости для отдельных процессов – комптоновского рассеяния, фотоэффекта, процесса рождения пар. Так в свинце при энергиях квантов менее 0,5 МэВ основной

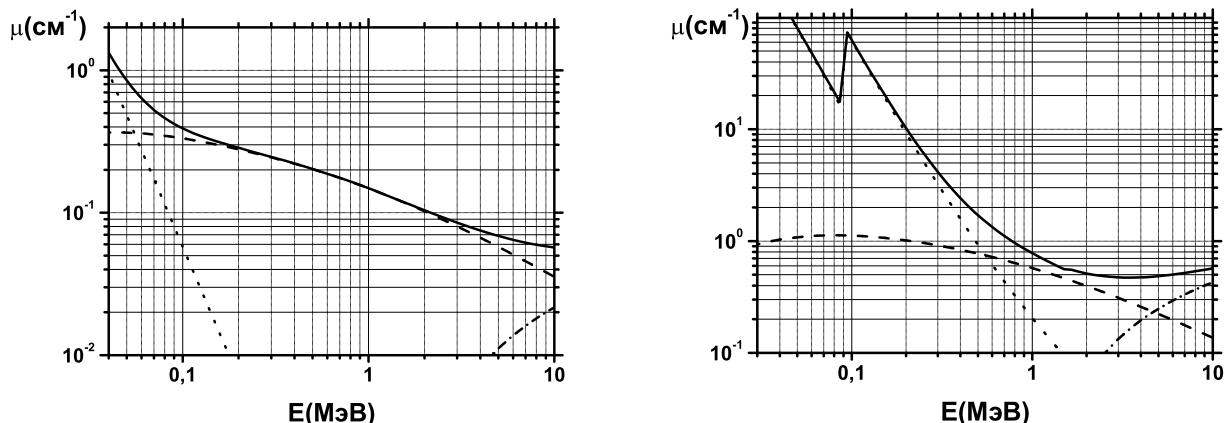


Рис. 30. Зависимость линейного коэффициента ослабления гамма – квантов в кремнии (слева), свинце (справа) от энергии квантов. Точки – фотоэффект, штрихи – комптоновское рассеяние, штрих – точка – рождение пар, сплошная линия – сумма всех сечений.

вклад в ослабление вносит фотоэффект, при энергиях от  $0.5 \text{ МэВ}$  до  $1 \text{ МэВ}$  комптоновское рассеяние и фотоэффект, при энергиях выше  $2 \text{ МэВ}$  - процесс рождения пар.

При рассмотрении прохождения гамма – квантов через вещество следует учитывать появление вторичных частиц, что для некоторых задач существенно. Истинное поглощение квантов происходит в процессах фотопоглощения и рождения пар. При комптоновском рассеянии всегда имеется рассеянный квант. Для квантов с энергией несколько  $\text{МэВ}$  и выше рожденные электрон и позитрон при прохождении через вещество испускают тормозные кванты, что увеличивает число квантов. Точный аналитический расчет числа квантов и их энергетического спектра при прохождении различной толщины поглотителя невозможен. Существуют эмпирически полученные формулы для описания такого процесса, но их точность невелика. Процесс прохождения кванта через вещество является типичным стохастическим процессом и для его описания наиболее адекватными являются методы статистического моделирования. В настоящее время существуют программы расчета для ЭВМ таких процессов, использующие такие методы. Таковыми, например, являются программы SRIM, FLUKA и GEANT.

## 5.6 Пример рассмотрения прохождения электронов через вещество.

Рассмотрим конкретный пример прохождения электронов и гамма – квантов через слой вещества. Процесс моделировался с помощью программы GEANT. В качестве вещества выбирался кремний. Образец представлял параллелепипед размером  $8 \times 8 \times 16 \text{ см}$ . Электроны или гамма – кванты с энергией  $15 \text{ МэВ}$  вылетали из центра грани по нормали к ней и направлялись вдоль оси  $Z$  (длина  $16 \text{ см}$ ). В расчете

прослеживалась история прохождения  $10^6$  частиц. Алгоритм расчета учитывал все процессы взаимодействия электронов и гамма – квантов с веществом. Гамма – кванты появлялись в процессе тормозного излучения.

Рассмотрим процесс прохождения электронов. На рис. 31 показано число электронов, прошедших слой кремния толщиной  $T$ . По этой зависимости определим экстраполированный пробег электронов – он составит  $\sim 2.9$  см. При прохождении электрона через вещество рождаются вторичные электроны при ионизации атомов и гамма – кванты тормозного излучения. Эти вторичные частицы так же рождают частицы следующего поколения. Это процесс развития электронно – фотонного ливня. В природе он реализуется при попадании в земную атмосферу частицы из космических лучей. До поверхности Земли доходят только вторичные частицы.

На рис. 32 показано распределение вторичных электронов и гамма – квантов, образованных в слое кремния. Распределение вторичных частиц повторяет распределение первичных по толщине вещества. Из этого рис. видно, что электроны рождаются и в слоях вещества, где первичные электроны отсутствуют – они поглощены в слоях вещества, которые расположены от точки входа в кремний до толщины порядка экстраполированного пробега. Вторичные электроны за этой толщиной рождаются гамма – квантами, которые в свою очередь возникают как тормозные кванты при торможении как первичных, так и вторичных электронов. Эти электроны возникают в процессах комптоновского рассеяния, фото – эффекте, рождения пар. Здесь мы имеем типичный пример развития электронно – фотонного ливня в веществе, рожденного первичным электроном с достаточной энергией.

Число вторичных электронов с энергией более  $10$  КэВ, рожденных при прохождении одного первичного электрона, усредненное по всему их распределению, приведенному на рис. 32, составляет 310. Соответствующее число вторичных гамма – квантов с энергией более  $10$  КэВ равно 17. Реальное число вторичных частиц больше – в расчете прослеживалась история прохождения частицы пока ее энергия превышала  $10$  КэВ. При достижении этой энергии частицей полагалось, что она исчезает. Но в действительности частицы с такой энергией продолжают рожать вторичные, т.к. энергия связи К-электрона в кремнии порядка  $2$  КэВ, а L, M-электронов еще меньше. На рис.32 (справа) показан энергетический спектр вторичных электронов и гамма – квантов. Основная часть спектра формируется частицами малой энергии. Отношение числа электронов с энергией  $1$  МэВ к числу электронов с энергией  $10$  МэВ составляет  $\sim 3000$ . Аналогичное отношение для гамма – квантов составляет  $\sim 150$ .

Рассмотрим другой случай – выберем толщину слоя вещества  $\sim$  порядка экстраполированного пробега электронов в этом веществе. Импульс электрона выберем  $5$  МэВ/с,

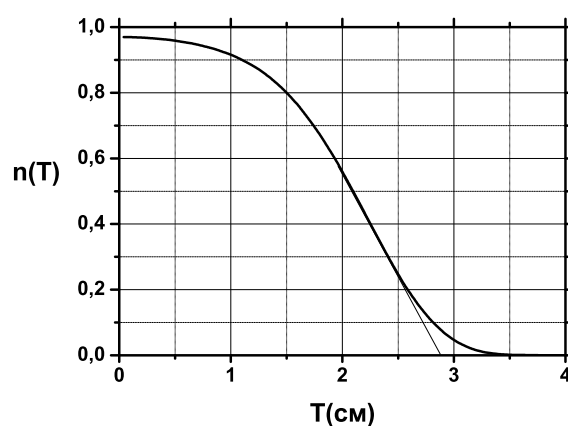


Рис. 31. Зависимость числа электронов, прошедших в кремнии толщину  $T$ . Зависимость нормирована на один падающий электрон.

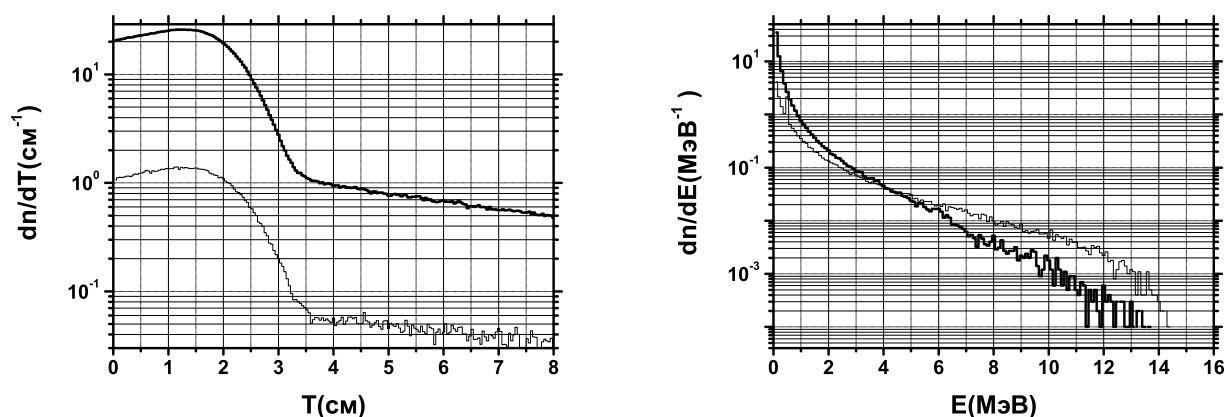


Рис. 32. Слева – зависимость числа вторичных электронов (толстая линия) и гамма – квантов (тонкая линия), рожденных в кремнии в точке с координатой  $T$ . Справа – энергетический спектр вторичных электронов (толстая линия) и гамма – квантов (тонкая линия), рожденных во всем образце кремния. Зависимости нормированы на один падающий электрон с энергией  $15 \text{ МэВ}$ .

чему соответствует кинетическая энергия электрона  $4.52 \text{ МэВ}$ . На рис.33 (слева) приведена зависимость числа электронов, прошедших слой кремния заданной толщины. Экстраполированный пробег электронов составляет  $0.83 \text{ см}$ . Возьмем толщину слоя кремния  $1 \text{ см}$ . Все первичные электроны с энергией  $4.52 \text{ МэВ}$  остановятся в этом слое. Означает ли это, что детекторы электронов и гамма – квантов, размещенные за этим слоем не зарегистрируют никаких частиц?

Результаты соответствующего расчета по программе GEANT показаны на рис.33 (справа). За слоем кремния есть как электроны, так и гамма – кванты. Это вторичные частицы: электроны рождают в слое кремния тормозные кванты, а те рождают пары электрон – позитрон. Этот ливень вторичных частиц выходит из слоя кремния. Интенсивность потока этих частиц невелика – на один падающий электрон из слоя выходит порядка  $10^{-2}$  электронов и  $10^{-4}$  гамма – квантов.

## 6 Некоторые процессы взаимодействия частиц со средами.

Существует ряд процессов взаимодействия заряженной частицы с веществом, при которых частица также теряет энергию, либо изменяет угловую зависимость вторичных излучений. В этих процессах частица теряет существенно меньшую долю своей энергии или эти процессы реализуются при некоторых особенных условиях. Если ограничиться процессами, в которых частица теряет значительную долю своей энергии или исчезает, то процессы кратко рассмотренные далее не относятся к числу таких процессов. Однако некоторые из рассматриваемых процессов широко используются в экспериментальных методиках, поэтому они и перечислены ниже.

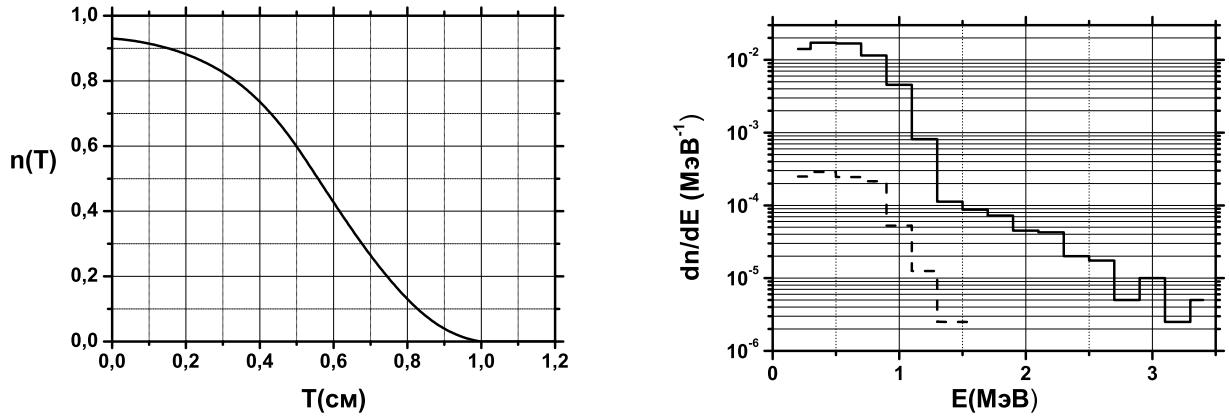


Рис. 33. Слева – число электронов, прошедших в кремнии толщину  $T$ . Зависимость нормирована на один один падающий электрон. Справа – энергетический спектр электронов (сплошная линия) и гамма – квантов (штрихи), выходящих из слоя кремния с толщиной 1 см, на который падают электроны с энергией 4.52 МэВ. Зависимости нормированы на одну падающую частицу.

- Прямое образование пар заряженной частицей.

Заряженная частица окружена облаком виртуальных фотонов. Такой фотон в электрическом поле другой частицы может родить пару. Такой процесс является процессом более высокого порядка, чем процесс тормозного излучения и поэтому его сечение меньше сечения тормозного излучения и поэтому потери энергии на такое рождение пар малы. Но для частиц большой массы ( $M > t\sqrt{137}$ ) эффективное сечение прямого образования пар может превысить сечение тормозного излучения. Но сечение тормозного излучения пропорционально  $M^{-2}$  и поэтому мало для тяжелых частиц, так что при рассмотрении потерь энергии частицей учет этого эффекта необходим только при специальных случаях.

- Черенковское излучение.

Это излучение возникает в том случае, когда частица движется в среде со скоростью, превышающей скорость света в этой среде. Излучение имеет сплошной спектр, простирающийся до видимого диапазона. Излучение происходит под углом  $\theta$ , определяемым из условия  $\cos \theta = 1/(\beta n)$ , где  $\beta = v/c$  - отношение скорости частицы к скорости света в пустоте,  $n$  - показатель преломления среды.

Энергия, теряемая частицей на генерацию черенковского излучения не велика. Однако это излучение широко используется для регистрации частиц и определения их энергетических характеристик.

- Аннигиляция позитронов.

Процесс прохождения электронов и позитронов через вещество почти полностью одинаковы. Разница состоит в том, что при малых энергиях следует учитывать аннигиляцию позитронов с электронами среды, приводящую к убыванию их числа. В результате аннигиляции на покоящемся свободном электроне



возникают два гамма – кванта преимущественно в направлениях вперед и назад в системе центра масс. Возможен процесс аннигиляции на связанном электроны и тогда возникает один квант. Эффективное сечение этого процесса меньше чем сечение двухфотонной аннигиляции.

- Взаимодействие двух фотонов и рассеяние фотона в электрическом поле.

При столкновении двух фотонов может произойти рождение пары электрон – позитрон. Если рождается виртуальная пара, то этот процесс эквивалентен фотон – фотонному рассеянию. Сечение таких процессов очень мало ( $\sim 10^{-29} \text{см}^2$ ) и практического значения не имеет.

Квант может рассеиваться в электрическом поле ядра - процесс дельбрукского рассеяния. Сечение этого процесса также мало ( $\sim 10^{-28} \text{см}^2$  для свинца).

- Интерференционные эффекты при прохождении частиц через вещество.

Класс этих эффектов достаточно обширен. При сверхвысоких энергиях эффективные сечения тормозного излучения и образования пар в плотных средах уменьшаются. Этот эффект вызывается конечным временем высвечивания фотона, которое по порядку величины равно  $1/\omega$ , где  $\omega$  – частота фотона. Только пройдя некоторое расстояние, определяемое временем излучения, фотон становится свободным. Но при прохождении этого расстояния электрон испытывает рассеяние на кулоновских полях атомов. Если угол этого рассеяния больше угла отклонения электрона в акте излучения фотона, то происходит уменьшение вероятности излучения. Этот эффект был предсказан Ландау и Померанчуком и носит их имя. Для свинца этот эффект существенен при энергии выше  $10^4 \text{ГэВ}$ .

В кристаллах при прохождении частиц возникают интерференционные эффекты, связанные с интерференцией рассеянных волн от соседних атомов или ядер. При низких энергиях частиц эти эффекты используются для анализа структуры вещества - дифракция рентгеновских лучей и электронов, нейтроннография и эффект теней при прохождении протонов через кристаллы.

При высоких энергиях заряженная частица проходя через кристалл может отклоняться кулоновским полем атомов решетки. При удачном входе в кристалл частица может проходить через кристалл между атомами решетки как по каналу, образованному ими. Этот эффект называется каналированием. Он уже используется для отклонения и формирования протонных пучков с энергией несколько ГэВ. Это очень эффективный и экономически выгодный метод, так как иначе для отклонения частиц таких энергий требуются магнитные поля большой величины. Создание и эксплуатация таких магнитных систем весьма дорого стоят.

- Взаимодействие гамма – квантов с веществом может происходить в процессах их резонансного рассеяния. Если возбужденное ядро  ${}_Z A$  испускает в процессе разрядки квант, то другое ядро  ${}_Z A$  может поглотить этот квант, перейдя в такое же возбужденное состояние. Сечение этого процесса имеет резкий максимум при энергии кванта равной энергии возбуждения ядра  ${}_Z A$ . Энергетический интервал, на котором сечение поглощения отлично от нуля равно естественной ширине уровня возбуждения ядра.

Выполнение условия поглощения кванта требует специальных условий для агрегатного состояния и теплового режима сред, в которых находятся ядра источники и поглотители. Эти условия должны обеспечить отсутствие потерь энергии при излучении и поглощении кванта на кинетическую энергию ядра отдачи. Эти условия обеспечиваются тем, что ядра входят в состав решетки кристалла и иногда температура кристалла поддерживается на низком уровне.

Реализация процесса резонансного рассеяния квантов привела к появлению мессбауэровской спектроскопии, которая позволяет проводить изучение структуры вещества с рекордной точностью по энергии достигающей величины  $\Delta E/E \sim 10^{-15}$ .

## 7 Задачи.

При решении задач можно использовать таблицы удельных потерь, имеющих в приложении В.

1. Система магнитов выделяют частицы с определенным импульсом. На вход системы поступает смесь частиц из электронов, пионов и протонов. На выходе системы расположен детектор из кремния с толщиной 1 мм. Определите возможна ли идентификация частиц по сорту при настройке системы на импульс величиной 1, 10, 100, 1000 МэВ/с.
2. Определите потери энергии протонами с энергией 10 МэВ, при прохождении через слой кремния толщиной 100 мкм.
3. Определите пробег протонов с энергией 10 МэВ в кремнии.
4. Определите толщину слоя кремния, в котором протоны с энергией 10 МэВ теряют 0.5 МэВ.
5. Определите толщину слоя кремния, в котором протоны с энергией 10 МэВ теряют половину своей энергии.
6. Определите толщину слоя кремния, в которой поглощается 50% протонов с начальной энергией 10 МэВ.
7. Определите удельные потери в минимуме ионизации и энергию этого минимума для однозарядных частиц: электронов, пионов, протонов.
8. Ускоритель вырабатывает пучок протонов с энергией 6 МэВ. По условиям эксперимента необходима энергия 4.5 МэВ. Рассчитайте толщину фильтра и оцените возникающее размытие первоначально монохроматического пучка.
9. Детектор облучается потоком гамма - квантов с энергией 100 МэВ. Необходимо снизить энергию квантов до 10 МэВ. Выберите необходимую толщину защиты, имеющую минимальную толщину.

10. Установка для идентификации сорта часть состоит из кремниевого детектора, толщиной  $25 \text{ мкм}$ , за которым расположен кремниевый детектор с толщиной  $2 \text{ мм}$ . Найдите минимальную и максимальную энергию частиц, регистрируемых этой системой. Частицы - изотопы водорода, изотопы гелия.
11. Постройте распределение энергии, оставленной протоном с энергией  $100 \text{ МэВ}$  в кремниевом детекторе с толщиной  $100 \text{ мкм}$ .
12. Постройте распределение энергии, оставленной протоном с энергией  $10 \text{ МэВ}$  в кремниевом детекторе с толщиной  $20 \text{ мкм}$ .

## 7.1 Приложение А.

Обозначим энергию первичного гамма – кванта  $\varepsilon_0$ , рассеянного гамма – кванта  $\varepsilon$ , полную энергию электрона  $E$ , массу электрона  $m$ , угол вылета рассеянного гамма–кванта по отношению к направлению движения первичного  $\theta$ , соответственно для электрона  $\varphi$ .

Законы сохранения энергии и импульса в процессе комптоновского рассеяния имеют следующий вид

$$\begin{aligned}\varepsilon_0 &= \varepsilon + E - m \\ \varepsilon \cos \theta + \sqrt{E^2 - m^2} \cos \varphi &= \varepsilon_0 \\ \varepsilon \sin \theta &= \sqrt{E^2 - m^2} \sin \varphi\end{aligned}$$

Второе уравнение преобразуем к виду

$$\varepsilon_0 - \varepsilon \cos \theta = \sqrt{E^2 - m^2} \cos \varphi$$

Возведя в квадрат это уравнение и третье, а затем сложив их, получим

$$\varepsilon_0^2 - 2\varepsilon_0\varepsilon \cos \theta + \varepsilon^2 = E^2 - m^2$$

Заменим в этом уравнении  $E = \varepsilon_0 - \varepsilon + m$

Тогда

$$\varepsilon_0^2 - 2\varepsilon_0\varepsilon \cos \theta + \varepsilon^2 = \varepsilon_0^2 + \varepsilon^2 + m^2 - 2\varepsilon_0\varepsilon + 2\varepsilon_0m - 2\varepsilon m - m^2$$

Отсюда

$$2\varepsilon((1 - \cos \theta) + m) = 2\varepsilon_0m$$

и

$$\varepsilon = \frac{2\varepsilon_0m}{2[\varepsilon_0(1 - \cos \theta) + m]} = \frac{\varepsilon_0}{1 + \frac{\varepsilon_0}{m}(1 - \cos \theta)}$$

Найдем связь между углами  $\theta$  и  $\varphi$ .

$$\varepsilon_0 - \varepsilon = \varepsilon_0 \left( 1 - \frac{\cos \theta}{1 + \frac{\varepsilon_0}{m}(1 - \cos \theta)} \right) = \varepsilon_0 \frac{(1 - \cos \theta) \left( \frac{\varepsilon_0}{m} \right)}{1 + \frac{\varepsilon_0}{m}(1 - \cos \theta)}$$

$$\sqrt{E^2 + m^2} \cos \varphi = \varepsilon_0 \frac{(1 - \cos \theta) \left( \frac{\varepsilon_0}{m} + 1 \right)}{1 + \frac{\varepsilon_0}{m}(1 - \cos \theta)}$$

$$\sqrt{E^2 + m^2} \sin \varphi = \frac{\varepsilon_0}{1 + \frac{\varepsilon_0}{m}(1 - \cos \theta)}$$

$$\operatorname{ctg} \varphi = (1 - \cos \theta) \left( \frac{\varepsilon_0}{m} + 1 \right) / \sin \theta$$

Окончательно получим

$$\operatorname{ctg} \varphi = \left( \frac{\varepsilon_0}{m} + 1 \right) \operatorname{tg} \theta / 2$$

Далее

$$1 - \cos \theta = 2 \sin^2 \theta / 2 = 2 \frac{\operatorname{tg}^2 \varphi}{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}$$

$$E - m = \frac{\varepsilon_0}{m} \left( (1 - \cos \theta)^{-1} + \frac{\varepsilon_0}{m} \right) =$$

$$\frac{\varepsilon_0}{m} \left( \frac{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}{2 \operatorname{tg}^2 \varphi} + \frac{\varepsilon_0}{m} \right) = \frac{\varepsilon_0}{m} \left( \frac{1}{2 \operatorname{tg}^2 \varphi} + \frac{1}{2} + \frac{\varepsilon_0}{m} \right)$$

$$E - m = \frac{2\varepsilon_0/m}{1 + 2\varepsilon_0/m + (\varepsilon_0/m + 1)^2 \operatorname{tg}^2 \varphi}$$

Рассчитаем дифференциальное сечение образования электронов

$$\frac{d\sigma}{d \cos \varphi} = \frac{d\sigma}{d \cos \theta} \frac{\sin \theta}{\sin \varphi} \frac{d\theta}{d\varphi}$$

$$\theta = 2 \cdot \operatorname{arctg}(\lambda \cdot \operatorname{tg}(\theta/2)) \quad \lambda = (1 + \varepsilon_0/m)$$

$$\frac{d\theta}{d\varphi} = 2 \cdot \lambda \frac{1}{1 + \lambda^2 \operatorname{ctg}^2 \varphi} \frac{1}{\sin^2 \varphi} = 2 \cdot \frac{1}{\lambda^2 \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi}$$

$$\frac{d\sigma}{d \cos \varphi} = \frac{d\sigma}{d \cos \theta} \frac{\sin \theta}{\sin \varphi} \cdot 2 \cdot \frac{1}{\lambda^2 \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi}$$

Энергия комптоновского электрона

$$E_e = h\nu_0 - h\nu' = h\nu_0 \left( 1 - \frac{1}{1 + (1 - \cos \theta)\gamma} \right) \quad \gamma = h\nu_0/m$$

Энергия электрона максимальна при  $\theta = \pi$  и равна

$$E_e^{\max} = \frac{2h\nu_0}{2h\nu_0 + m}$$

Найдем дифференциальное сечение образования электрона с энергией  $E$

$$\frac{d\sigma}{dE_e} = \frac{d\sigma}{d \cos \theta} \cdot \frac{d \cos \theta}{dE_e}$$

$$\frac{d \cos \theta}{dE_e} = - \frac{h\nu_0}{[1 + (1 + (1 - \cos \theta)\gamma)]^2} \gamma = \frac{(h\nu')^2}{m}$$

$$\frac{d\sigma}{dE_e} = \frac{d\sigma}{d \cos \theta} \cdot \frac{m}{(h\nu')^2}$$

При прохождении гамма – кванта через вещество комптоновское взаимодействие не приводит к поглощению квантов, а только к изменению энергии и направления движения квантов.

## 7.2 Приложение Б

Законы сохранения энергии и импульса при рождении пары на электроне в нерелятивистском приближении имеют вид

$$\begin{aligned}\frac{h\nu}{c} &= \vec{p}_- + \vec{p}_+ + \vec{p}_e \\ h\nu &= 2mc^2 + \frac{p_-^2}{2m} + \frac{p_+^2}{2m} + \frac{p_e^2}{2m}\end{aligned}$$

Возведем первое уравнение в квадрат

$$\left(\frac{h\nu}{c}\right)^2 = \vec{p}_-^2 + \vec{p}_+^2 + \vec{p}_e^2 + 2(\vec{p}_- \cdot \vec{p}_+) + 2(\vec{p}_- \cdot \vec{p}_e) + 2(\vec{p}_+ \cdot \vec{p}_e) = \vec{p}_-^2 + \vec{p}_+^2 + \vec{p}_e^2 + \delta$$

Отсюда

$$\vec{p}_-^2 + \vec{p}_+^2 + \vec{p}_e^2 = \left(\frac{h\nu}{c}\right)^2 - \delta$$

Из второго уравнения получим

$$h\nu - 2mc^2 = (\vec{p}_-^2 + \vec{p}_+^2 + \vec{p}_e^2)/(2m) = \left[\left(\frac{h\nu}{c}\right)^2 - \delta\right]/(2m)$$

Далее

$$(h\nu)^2 - 2mc^2 h\nu + 4(mc^2)^2 - \delta c^2 = 0$$

Решение квадратного уравнения есть

$$\begin{aligned}h\nu &= mc^2 \pm \sqrt{(mc^2)^2 - 4(mc^2)^2 + \delta c^2} \\ h\nu &= mc^2 \pm \sqrt{\delta c^2 - 3(mc^2)^2}\end{aligned}$$

Учтем, что  $h\nu \geq 2mc^2$ , тогда решение уравнения

$$h\nu = mc^2 + \sqrt{\delta c^2 - 3(mc^2)^2}$$

Отсюда следует, что  $\delta c^2 > 4(mc^2)^2$ . Следовательно, из равенства  $h\nu = 2mc^2 + \delta/2m$  получим, что

$$h\nu \geq 2mc^2 + 4(mc^2)^2/(2mc^2) = 4mc^2$$

Итак, рождение гамма – квантом пары электрон – позитрон в поле электрона возможно, если энергия кванта больше  $4mc^2$ . Однако отметим, что проведенное рассмотрение выполнено для нерелятивистских частиц. Но суммарная кинетическая энергия трех частиц составляет  $2mc^2$ , что при равномерном распределении энергии по трем частицам соответствует  $\beta = 0.5$ , что означает достаточно большие ошибки при использовании нерелятивистского приближения.

### 7.3 Приложение В

Во всех таблицах энергия в  $MэВ$ ,  $\frac{dE}{dx}$  в  $MэВ/г/см^2$ .

Таблица 4. Потери на ионизацию для электронов в кремнии.

$E$	$\frac{dE}{dx}$	$E$	$\frac{dE}{dx}$	$E$	$\frac{dE}{dx}$	$E$	$\frac{dE}{dx}$	$E$	$\frac{dE}{dx}$	$E$	$\frac{dE}{dx}$
0.1	3.83	1.0	1.54	10.0	1.65	100.0	1.85	1000.0	2.02	10000.0	2.19
0.2	2.50	2.0	1.51	20.0	1.71	200.0	1.90	2000.0	2.07	11000.0	2.20
0.3	2.04	3.0	1.53	30.0	1.75	300.0	1.93	3000.0	2.10	12000.0	2.21
0.4	1.84	4.0	1.56	40.0	1.78	400.0	1.95	4000.0	2.12	13000.0	2.21
0.5	1.72	5.0	1.58	50.0	1.79	500.0	1.97	5000.0	2.14	14000.0	2.22
0.6	1.65	6.0	1.59	60.0	1.81	600.0	1.98	6000.0	2.15	15000.0	2.22
0.7	1.61	7.0	1.61	70.0	1.82	700.0	1.99	7000.0	2.17		
0.8	1.58	8.0	1.62	80.0	1.83	800.0	2.00	8000.0	2.18		
0.9	1.55	9.0	1.64	90.0	1.84	900.0	2.01	9000.0	2.18		

Таблица 5. Потери на ионизацию для пионов в кремнии.

$E$	$\frac{dE}{dx}$	$E$	$\frac{dE}{dx}$	$E$	$\frac{dE}{dx}$
1.0	44.7	10.0	7.48	100.0	1.96
2.0	26.2	20.0	4.52	200.0	1.71
3.0	19.1	30.0	3.47	300.0	1.67
4.0	15.2	40.0	2.93	400.0	1.67
5.0	12.8	50.0	2.60	500.0	1.68
6.0	11.1	60.0	2.38	600.0	1.70
7.0	9.83	70.0	2.23	700.0	1.72
8.0	8.87	80.0	2.12	800.0	1.74
9.0	8.10	90.0	2.03	900.0	1.76
				1000.	1.78

Таблица 6. Потери на ионизацию для протонов в кремнии.

$E$	$\frac{dE}{dx}$	$E$	$\frac{dE}{dx}$	$E$	$\frac{dE}{dx}$	$E$	$\frac{dE}{dx}$
1.0	176.	10.0	34.8	100.0	5.86	1000.0	1.81
2.0	112.	20.0	20.3	200.0	3.64	2000.0	1.67
3.0	84.8	30.0	14.8	300.0	2.86	3000.0	1.67
4.0	69.1	40.0	11.8	400.0	2.47	4000.0	1.70
5.0	58.7	50.0	9.90	500.0	2.24	5000.0	1.72
6.0	51.2	60.0	8.60	600.0	2.08	6000.0	1.75
7.0	45.6	70.0	7.64	700.0	1.98	7000.0	1.77
8.0	41.3	80.0	6.91	800.0	1.90	8000.0	1.80
9.0	37.7	90.0	6.33	900.0	1.84	9000.0	1.82
						10000.	1.83



Таблица 7. Потери на ионизацию для дейтронов в кремнии.

$E$	$\frac{dE}{dx}$	$E$	$\frac{dE}{dx}$	$E$	$\frac{dE}{dx}$	$E$	$\frac{dE}{dx}$
1.0	255.	10.0	58.5	100.0	9.86	1000.0	2.23
2.0	175.	20.0	34.7	200.0	5.84	2000.0	1.80
3.0	135.	30.0	25.3	300.0	4.38	3000.0	1.70
4.0	112.	40.0	20.2	400.0	3.63	4000.0	1.67
5.0	96.2	50.0	17.0	500.0	3.17	5000.0	1.67
6.0	84.6	60.0	14.7	600.0	2.85	6000.0	1.67
7.0	75.8	70.0	13.0	700.0	2.63	7000.0	1.68
8.0	68.9	80.0	11.7	800.0	2.46	8000.0	1.70
9.0	63.2	90.0	10.7	900.0	2.33	9000.0	1.71
						10000.	1.72

Таблица 8. Потери на ионизацию для  ${}^4\text{He}$  в кремнии.

$E$	$\frac{dE}{dx}$	$E$	$\frac{dE}{dx}$	$E$	$\frac{dE}{dx}$	$E$	$\frac{dE}{dx}$
1.0	1312	10.0	389	100.0	68.0	1000.0	12.7
2.0	1005	20.0	235	200.0	39.5	2000.0	8.92
3.0	817	30.0	174	300.0	28.9	3000.0	7.74
4.0	695	40.0	139	400.0	23.4	4000.0	7.22
5.0	609	50.0	117	500.0	19.9	5000.0	6.95
6.0	545	60.0	102	600.0	17.5	6000.0	6.80
7.0	495	70.0	90.1	700.0	15.8	7000.0	6.72
8.0	455	80.0	81.1	800.0	14.5	8000.0	6.68
9.0	420	90.0	73.9	900.0	13.5	9000.0	6.66
						10000.	6.66

## Список литературы

- [1] Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц Квантовая механика. Нерелятивистская теория, изд. Наука, М., 1974.
- [2] В.Б.Берестецкий, Е.М.Лифшиц, Л.П.Питаевский Квантовая электродинамика, главная редакция физико – математической литературы, М., 1980
- [3] L.Landau On Energy Loss of Fast Particles by Ionisation J.Phys 8,201,1944.
- [4] P.V.Vavilov Ionisation losess of high energy heavy particles ЖЭТФ 5 749,1957.
- [5] J.F.Ziegler, M.D.Ziegler, J.P.Biersack The Stopping and Range of Ions in Matter, [www.srim.org](http://www.srim.org)
- [6] Э.Сторм, И.Израэль Сечения взаимодействия гамма – излучения, Атомиздат, 1973.
- [7] S. Agostinelli et al Instruments and Methods in Physics Research Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment 506, 250, 2003  
<http://cern.ch/geant4>